Dualistisch karakter van licht en materie

Fotonen

Bij veel experimenten heeft licht een golfkarakter. Daarbij wordt het verband tussen de lichtsnelheid c, de frequentie f en de golflengte λ gegeven door:

$c = f \cdot \lambda$ (vgl. 1)

Bij een aantal natuurkundige verschijnselen, zoals het foto-elektrisch effect en het compton-effect, blijkt licht echter ook een deeltjeskarakter te hebben. Deze lichtdeeltjes hebben geen massa en worden fotonen genoemd. De energie E van één foton volgt uit de volgende vergelijking waarin h (= $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js) de constante van Planck is.

$E = h \cdot f$ (vgl. 2)

Een lichtbundel met een bepaalde golflengte (en dus een bepaalde frequentie) bestaat volgens de deeltjestheorie uit een stroom fotonen die allemaal bewegen met de lichtsnelheid en allemaal een energie hebben volgens vergelijking 2.

Fotonen hebben naast energie ook een impuls. Uit de speciale relativiteitstheorie volgt dat het verband tussen de energie E en de impuls p van een deeltje beschreven wordt door:

$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ (vgl. 3)

Fotonen zijn massaloos (m = 0). Voor fotonen kan vergelijking 3 daarom vereenvoudigd worden tot:

$E = p \cdot c$ (vgl. 4)

Als we de vergelijkingen 1, 2 en 4 met elkaar combineren, krijgen we:

$\lambda = \dfrac{h}{p}$ (vgl. 5)

We zien dat de golflengte λ van een foton samenhangt met zijn impuls. Naarmate de impuls groter wordt, wordt de golflengte kleiner.

Materiële deeltjes

Tot zover spraken we over fotonen. Laten we nu naar materiële deeltjes met massa m kijken, zoals elektronen en neutronen. Deze deeltjes worden in de mechanica beschreven door de impuls p en de kinetische energie E_K. Als de snelheid v van zo'n deeltje veel kleiner dan de lichtsnelheid is, gelden hiervoor de volgende formules:

$p = m \cdot v$ (vgl. 6).

$E_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ (vgl. 7).

Bij sommige natuurkundige verschijnselen blijken materiële deeltjes (net als licht) een golfkarakter te hebben. In overeenstemming met vergelijking 5 geldt de volgende vergelijking voor de golflengte van een 'materiegolf' of 'de Broglie golf' ter ere van de Franse fysicus de Broglie.

$\lambda = \frac{h}{p}$ (vgl. 8)

Dat het golfkarakter van deeltjes zo lang voor de mens verborgen is gebleven, is het gevolg van de zeer kleine waarde van de constante van Planck. Als we voor de massa m = 1 kg en voor de snelheid v = 1 m/s nemen, wordt de bijbehorende golflengte:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 1} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{m}.$$

Deze golflengte is te klein om waar te nemen. Als we echter een elektron nemen met een massa van $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg en een snelheid van 10^6 m/s, krijgen we:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{6}} = 0{,}73 \cdot 10^{-9}\ \text{m}.$$

Dit is van dezelfde orde van grootte als de afmeting van een atoom. Nu speelt het golfkarakter dus wel een rol.

Samengevat geldt het volgende.

$$\boxed{\text{Voor een foton en voor een deeltje met massa geldt: } \lambda = \frac{h}{p}.}$$

Opmerking

1)

In het algemeen spreken we bij golven van 'dispersie' als de voortplantingssnelheid afhankelijk is van de golflengte. Bij materiegolven is er sprake van dispersie. Er geldt immers dat hoe groter de golflengte is, des te kleiner de impuls en daarmee de snelheid is. Overigens zijn lichtgolven niet dispersief.

2)
Uit de vergelijkingen 1 en 2 volgt voor een foton:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E}$$

We kunnen deze formule echter NIET gebruiken voor een materiedeeltje waarbij E de kinetische energie is.

Vrij deeltje

In de volgende tekst kijken naar een vrij deeltje (foton of materiedeeltje) dat in de richting van de positieve x-as beweegt. Voorlopig beperken we ons tot het geval waarin het deeltje scherp gedefinieerde waarden voor de impuls en energie heeft. Het deeltje heeft dan ook een scherp gedefinieerde waarde van de golflengte λ.
De volgende golffunctie Ψ(x,t) beschrijft dit deeltje.

$$\psi = e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{(vgl. 9)}$$

Merk op dat deze golf loopt van x = - oneindig tot x = + oneindig. Anders gezegd: het deeltje kan zich overal langs de x-as bevinden. De onbepaaldheid van de plaats van het deeltje is dus oneindig groot (Δx = ∞). Omgekeerd is de impuls precies bekend (Δp = 0). Dit is in overeenstemming met de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

Voor het zogenoemde ‘golfgetal’ k (uitgedrukt in radialen per meter) geldt:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Voor de hoekfrequentie ω (uitgedrukt in radialen per seconde) geldt (met T = trillingstijd en f = frequentie):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

We gaan nu uit van het volgende verband tussen de frequentie f en de energie E.

Voor een foton en voor een deeltje met massa geldt: $E = h \cdot f$.

In het geval van een massief deeltje is E de kinetische energie.

Voordat we hiermee verder gaan, introduceren we eerst de constante van Dirac die wordt uitgesproken als ‘h-streep’ (in het Engels ‘h-bar’). Hiervoor geldt:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Voor het golfgetal vinden we dan:

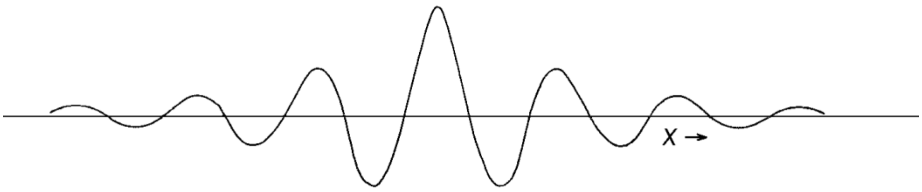
$$k = \frac{p}{\hbar} \text{.....(vgl. 10)}$$

Voor de hoekfrequentie krijgen we:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{(vgl. 11)}$$

Bij een materiedeeltje is E de kinetische energie van het deeltje.

In praktische gevallen is de mogelijke plaats van het deeltje begrensd en is er sprake van een golfpakketje dat eindige afmetingen heeft. Zie de onderstaande schematische figuur.



De groepssnelheid v_G is de snelheid waarmee het golfpakketje zich verplaatst. Hiervoor geldt:

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}\,.$$

Volgens vergelijking 10 en 11 geldt dan ook:

$$v_G = \frac{dE}{dp}\,.$$

Uiteraard moet de groepssnelheid van een foton de lichtsnelheid c zijn. Dit is in overeenstemming met de volgende berekening.

$$v_G = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{E}{E/c}\right) = c$$

De groepssnelheid van een materiedeeltje is natuurlijk de snelheid v van het deeltje zelf. Ook dat is in overeenstemming met de volgende berekening (met gebruikmaking van vgl. 6 en 7).

$$v_G = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2\cdot m}\right) = \frac{p}{m} = v\,.$$