Uitwerkingen § 1

Opgave 1
De momentane spanning is de spanning op een moment.
De effectieve spanning zegt ook iets over de hoogte van de spanning maar is een soort tijdgemiddelde.

Opgave 2
a.
$$U_{eff} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{30\text{ V}}{\sqrt{2}} = 21\text{ V}$$
b.
$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{21{,}2^2}{15} = 30\text{ W}$$

Opgave 3
$$I_{eff} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{33}{22}} = 1{,}22\text{ A}$$
$$I_{\max} = \sqrt{2} \cdot I_{eff} = 1{,}7\text{ A}$$

Opgave 4
a.
Het geleverde vermogen verandert niet als de spanning omkeert. De stroom keert dan namelijk ook om. Er geldt dus: $U_{eff} = 3$ V
b.
De helft van de tijd is het 'momentane' vermogen nul. Het gemiddelde vermogen is dus de helft van het maximale vermogen.
c.
$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} 3\text{ V} = 2{,}1\text{ V}.$$

Opgave 5
a.
$$P_{gem} = \frac{1}{3} P_{\max}$$
b.
$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\max}$$
c.
$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{\max}$$

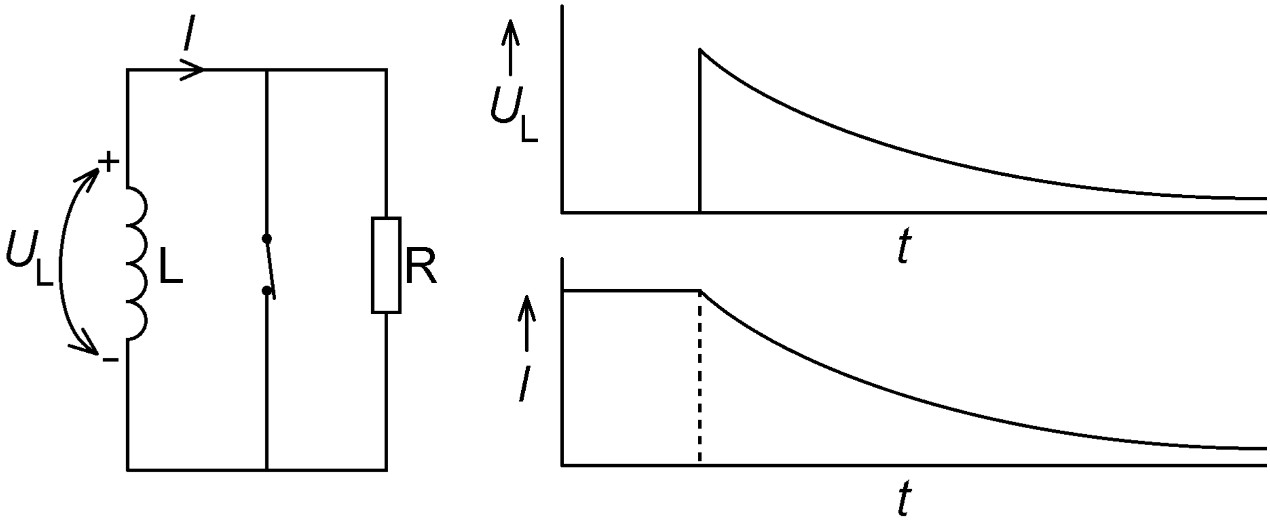
Uitwerkingen § 2

<u>Opgave 1</u>
Een spoel verzet zich tegen snelle veranderingen in de stroom.

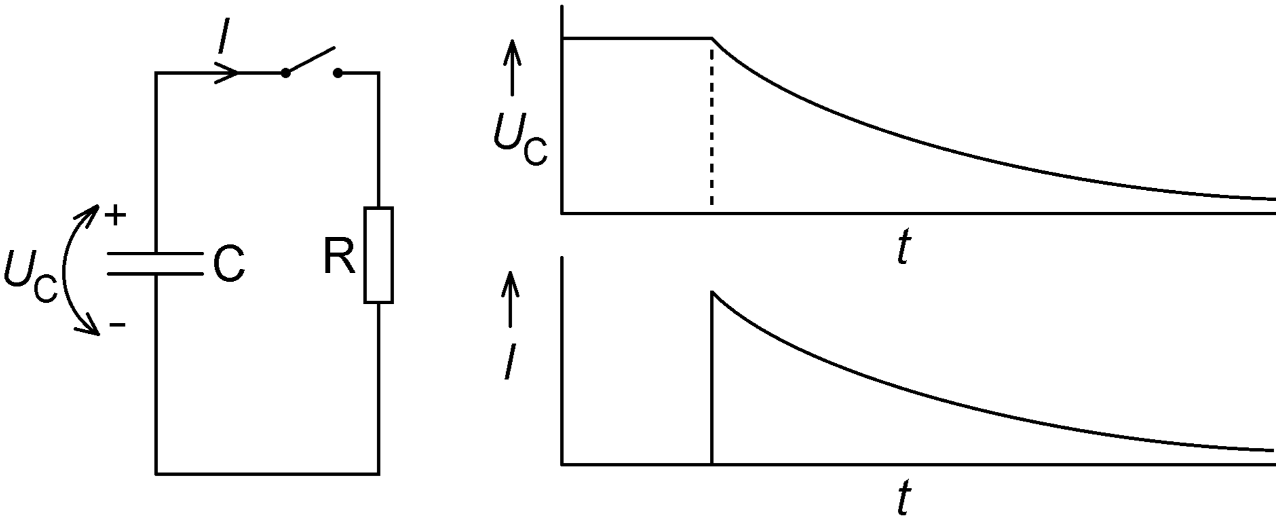
<u>Opgave 2</u>
Een condensator verzet zich tegen snelle veranderingen in de spanning.

<u>Opgave 3</u>
In een stofzuiger zit een spoel waar een stroom doorheen loopt. Als je de stekker uit het stopcontact trekt, moet de stroom zeer snel dalen. Dit leidt tot zeer grote spanningen.

<u>Opgave 4</u>



<u>Opgave 5</u>



<u>Opgave 6</u>
De spanning over de spoel
De stroom door de condensator

Uitwerkingen § 3

Opgave 1

a.

$Z = \omega L = 2\pi \cdot 100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 12{,}6\ \Omega$

b.

$I_{max} = \dfrac{U_{max}}{Z} = \dfrac{8{,}0}{12{,}6} = 0{,}64\ \text{A}$

Opgave 2

a.

$Z = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi \cdot 2{,}0 \cdot 10^{3} \cdot 0{,}60 \cdot 10^{-6}} = 133\ \Omega$

b.

$I_{max} = \dfrac{U_{max}}{Z} = \dfrac{12}{133} = 0{,}090\ \text{A}$

Opgave 3

a.

Condensator

Weerstand

spoel

b.

Kleinste impedantie (grootste stroom bij dezelfde spanning)

Opgave 4

a.

Een spoel is een kortsluiting bij lage frequenties en een isolator bij hoge frequenties.

b.

Een condensator is een isolator bij lage frequenties en een kortsluiting bij hoge frequenties.

c.

$Z_R = Z_L$ dus $R = \omega L$ dus $100 = 2\pi \cdot f \cdot 0{,}035$ dus $f = 455$ Hz

d.

$Z_R = Z_C$ dus $R = 1/(\omega C)$ dus $100 = 1 / (2\pi \cdot f \cdot 10^{-5})$ dus $f = 159$ Hz

Opgave 5

a.

De spanning over de spoel is dan even groot als de spanning over de condensator. Omdat beide spanningen in tegenfase zijn, heffen ze elkaar op en zal de spanning over het lampje gelijk zijn aan de bronspanning.

b.

De stroom door de spoel is dan even groot als de stroom door de condensator. Omdat beide stromen in tegenfase zijn, heffen ze elkaar op en zal de stroom door het lampje nul zijn.

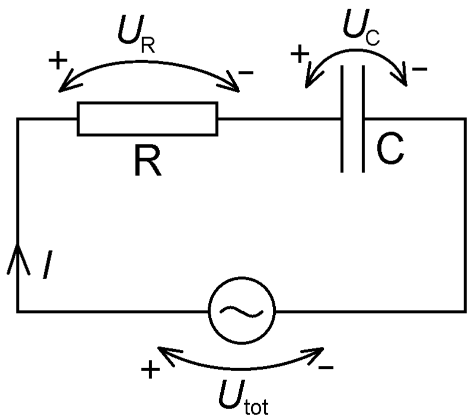
c.

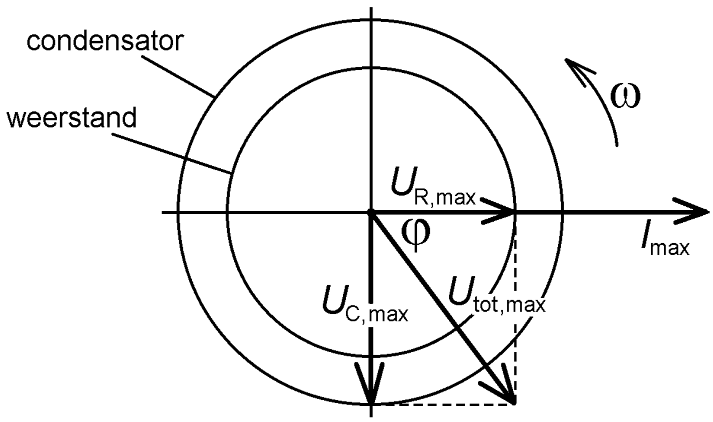
$Z_L = Z_C$ dus $\omega L = 1/(\omega C)$ dus $2\pi \cdot f \cdot 0{,}035 = 1 / (2\pi \cdot f \cdot 10^{-5})$ dus $f = 269$ Hz

Uitwerkingen § 4

<u>Opgave 1</u>
De signalen 1 en 2 moeten dan in fase met elkaar zijn.

<u>Opgave 2</u>
a. en b.





c.

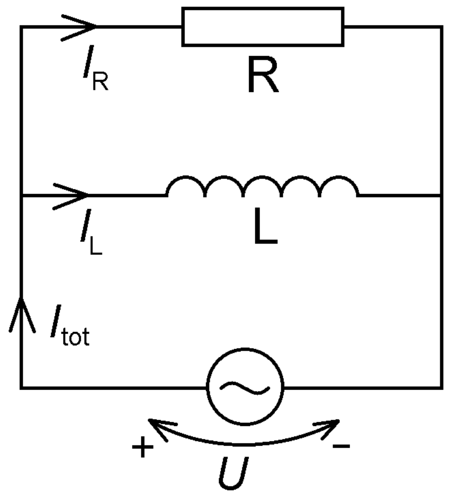
$U_{tot,\max}^2 = U_{R,\max}^2 + U_{C,\max}^2$.

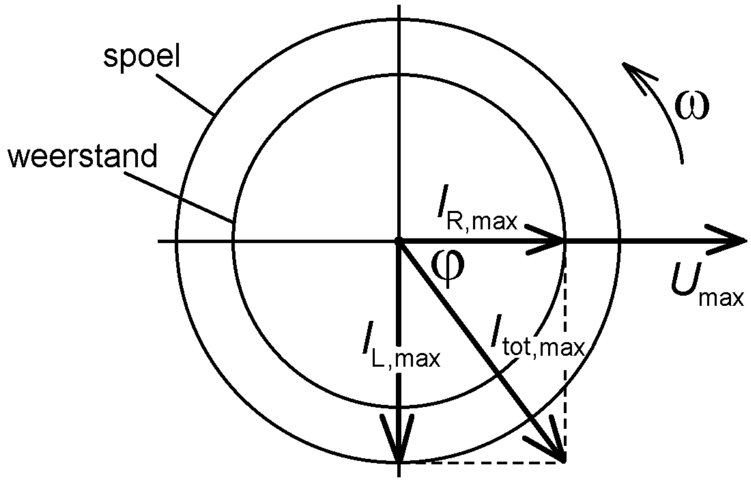
d.

$$\tan(\varphi) = -\frac{U_{C,\max}}{U_{R,\max}}$$

Het minteken komt voort uit het feit dat de totale spanning achterloopt op de stroom.

<u>Opgave 3</u>
a. en b.





c.

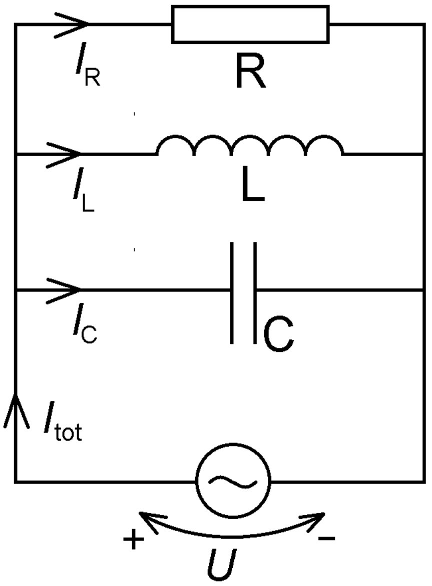
$$I_{tot,max}^2 = I_{R,max}^2 + I_{L,max}^2 .$$

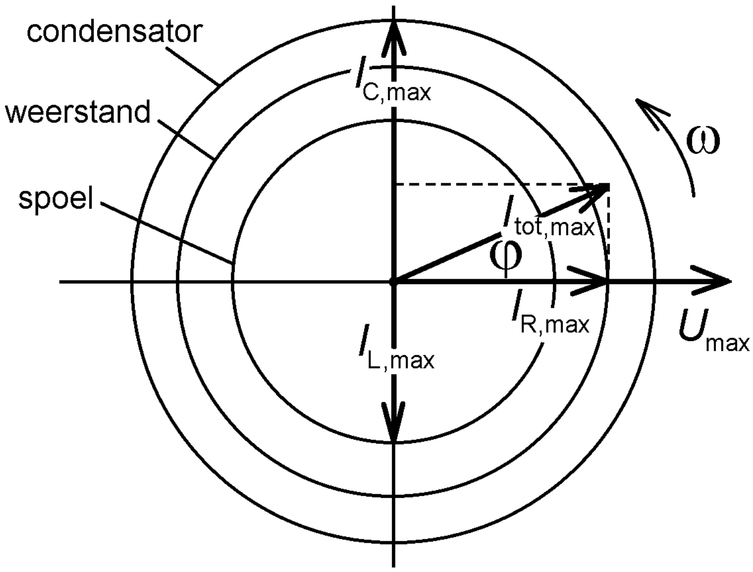
d.

$$\tan(\varphi) = \frac{I_{L,max}}{I_{R,max}}$$

<u>Opgave 4</u>

a. en b.





c.

$$I_{tot,max}^2 = I_{R,max}^2 + \left(I_{L,max} - I_{C,max}\right)^2 = 3{,}0^2 + \left(2{,}5 - 4{,}0\right)^2 = 11{,}25$$

$I_{tot,max}$ = 3,4 A

d.

$$\tan(\varphi) = \frac{I_{L,max} - I_{C,max}}{I_{R,max}} = \frac{2{,}5 - 4{,}0}{3{,}0}$$ Hieruit volgt φ = -27º.

Het minteken geeft aan dat de spanning achter loopt op de totale stroom.

Uitwerkingen § 5

Opgave 1

a.

$Z_{ser} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ \Omega$

$\tan(\varphi) = \dfrac{40}{30}$. Hieruit volgt φ = 53º.

b.

30 Ω want de spoel en de condensator heffen elkaars werking op.

0º

Serieresonantie

c.

$$Z_{par} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{30^2} + \frac{1}{40^2}}} = 24\ \Omega$$

$\tan(\varphi) = \dfrac{30}{40}$. Hieruit volgt: φ = 37º.

d.

30 Ω want de spoel en de condensator heffen elkaars werking op.

0º

Parallelresonantie

Opgave 2

a.

$Z_L = \omega L = 2\pi \cdot 800 \cdot 0{,}15 = 754\ \Omega$

b.

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 800 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6}} = 199\ \Omega$$

c.

$Z_{ser} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{350^2 + (754 - 199)^2} = 656\ \Omega$

d.

$$I_{\max} = \frac{U_{tot,\max}}{Z_{ser}} = \frac{7{,}5}{656} = 11\,\text{mA}$$

e.

$\tan(\varphi) = \dfrac{Z_L - Z_C}{R} = \dfrac{754 - 199}{350}$. Hieruit volgt: φ = 58º.

Opgave 3

a.

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 6{,}0 \cdot 10^3 \cdot 350 \cdot 10^{-9}} = 76\ \Omega$$

$$Z_{par} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{Z_C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{47^2} + \frac{1}{76^2}}} = 40\ \Omega$$

b.

$$I_{tot,\max} = \frac{U_{\max}}{Z_{par}} = \frac{12}{40} = 0{,}30\ \text{A}$$

c.

$$\tan(\varphi) = \frac{-\frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{R}} = -\frac{R}{Z_C} = -\frac{47}{76}$$. Hieruit volgt: φ = -32º.

Opgave 4

a.

$$Z_{ser} = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

b.

$$\tan(\varphi) = \frac{Z_L}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

Opgave 5

a.

$$Z_{par} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{Z_C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{1 + \omega^2 \mathrm{R}^2 \mathrm{C}^2}}$$

b.

$$\tan(\varphi) = \frac{-\frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{R}} = -\frac{R}{Z_C} = -\omega RC$$

Uitwerkingen § 6

Opgave 1
a.
Tijdstippen 5 en 10.
Het kwadraat van de stroom is dan maximaal.
Het geleverde vermogen is tot die tijdstippen positief geweest.
(Bij een positief vermogen wordt er energie toegevoerd en bij een negatief vermogen wordt er energie afgevoerd.)
b.
Tijdstippen 3 en 8.
Het kwadraat van de spanning is dan maximaal.
Het geleverde vermogen is tot die tijdstippen positief geweest.

Opgave 2
a.
360º / 6 = 60º
Omdat de spanning achterloopt (in plaats van voorloopt) op de stroom, moeten we de hoek nog van een minteken voorzien. Dus geldt: φ = -60º.
b.
$$P_{gem} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) = 30 \cdot 0{,}15 \cdot \cos(-60^\circ) = 2{,}25 \text{ W}$$

Opgave 3
De spoel en de condensator zullen gemiddeld genomen geen vermogen afnemen.

Opgave 4
Stap 1
Voor de impedantie van de serieschakeling geldt:
$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{500^2 + (2\pi \cdot 400)^2 0{,}30^2} = 905\ \Omega$$
Stap 2
Voor de effectieve stroom geldt:
$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{18}{905} = 0{,}020 \text{ A}$$
Stap 3
Voor het argument van de impedantie geldt:
$$\tan(\varphi) = \frac{Z_L}{R} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi \cdot 400 \cdot 0{,}30}{500} \rightarrow \varphi = 56{,}4^\circ .$$
Stap 4
Voor het gemiddelde vermogen geldt:
$$P_{gem} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) = 18 \cdot 0{,}020 \cdot \cos(56{,}5^\circ) = 0{,}20 \text{ W}$$

Controleberekening:
$$P_{gem} = I_{eff}^2 \cdot R = 0{,}020^2 \cdot 500 = 0{,}20 \text{ W} . \text{ Klopt!}$$

Opgave 5

Stap 1

Voor de impedantie van de serieschakeling geldt:

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 42{,}5\ \Omega$$

Stap 2

Voor de effectieve stroom geldt:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{20}{42{,}5} = 0{,}47\text{ A}$$

Stap 3

Voor het argument van de impedantie geldt:

$$\tan(\varphi) = \frac{-Z_C}{R} = \frac{-1}{\omega RC} = \frac{-1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-6}} \rightarrow \varphi = -69{,}3^\circ .$$

Stap 4

Voor het gemiddelde vermogen geldt:

$$P_{gem} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) = 20 \cdot 0{,}47 \cdot \cos(-69{,}3^\circ) = 3{,}3\text{ W}$$

Controleberekening:

$$P_{gem} = I_{eff}^2 \cdot R = 0{,}47^2 \cdot 15 = 3{,}3\text{ W} .\ \text{Klopt!}$$

Uitwerkingen § 7

Opgave 1
$6 + 8 \cdot i$

Opgave 2
$(3 + 4 \cdot i) \cdot (5 + 3 \cdot i) = 15 - 12 + 9 \cdot i + 20 \cdot i = 3 + 29 \cdot i$

Opgave 3
$$r = \sqrt{4^2 + 7^2} = 8{,}1$$
$$\tan(\varphi) = \frac{7}{4} \rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Opgave 4
$$a = 14 \cdot \cos(30^\circ) = 12\,.$$
$$b = 14 \cdot \sin(30^\circ) = 7{,}0$$

Opgave 5
a.
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2{,}83$$
$$\arg(z_1) = \arctan(\frac{2}{2}) = 45{,}0^\circ$$
b.
$$|z_2| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47$$
$$\arg(z_2) = \arctan(\frac{2}{4}) = 26{,}6^\circ$$
c.
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\ |z_2| = 2{,}83 \cdot 4{,}47 = 12{,}6$
$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = 45{,}0^\circ + 26{,}6^\circ = 71{,}6^\circ$

d.
$z_1 \cdot z_2 = (2 + 2 \cdot i) \cdot (4 + 2 \cdot i) = 4 + 12 \cdot i$
$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{4^2 + 12^2} = 12{,}6$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arctan(\frac{12}{4}) = 71{,}6^\circ$$
Deze waarden kloppen met die van vraag c.

Opgave 6

$|z_1 / z_2| = 7{,}2 / 3{,}0 = 2{,}4$

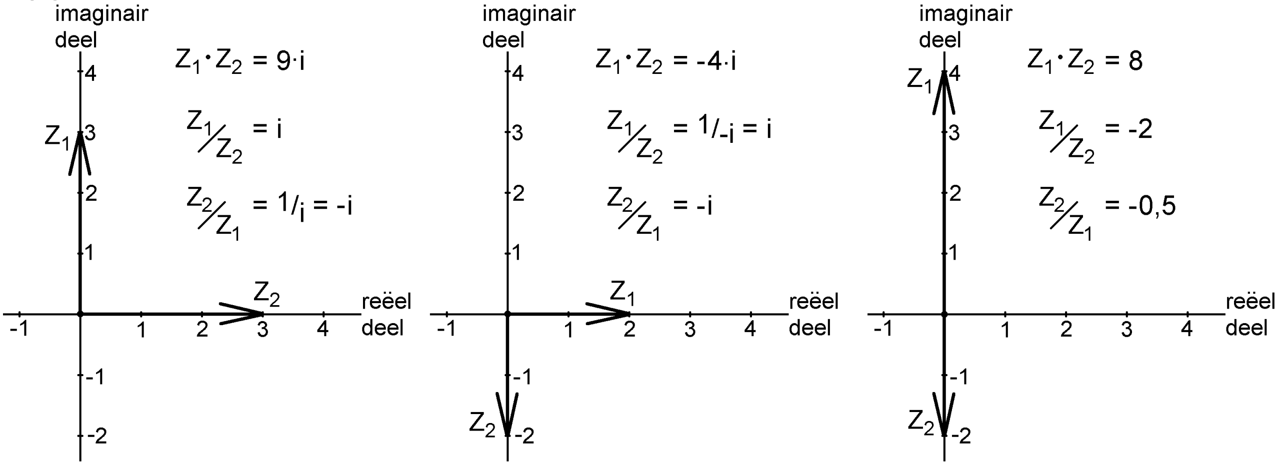
$\arg(z_1 / z_2) = 65^o - 35^o = 30^o$

$a = 2{,}4 \cdot \cos(30^o) = 2{,}1$

$b = 2{,}4 \cdot \sin(30^o) = 1{,}2$

Dus $z_1 / z_2 = 2{,}1 + 1{,}2 \cdot i$

Opgave 7



Opgave 8

De tweede (complexe) factor heeft een argument dat even groot maar tegengesteld is aan het argument van de eerste (complexe) factor. Bij het vermenigvuldigen van de factoren moeten de argumenten worden opgeteld. Dit geeft 0º.

Opgave 9

$$\frac{2+6\cdot i}{3+4\cdot i} = \frac{(2+6\cdot i)\cdot(3-4\cdot i)}{(3+4\cdot i)\cdot(3-4\cdot i)} = \frac{30+10\cdot i}{25} = 1{,}2+0{,}4\cdot i$$

Uitwerkingen § 8

Opgave 1

a.

$Z_{ser} = R + \frac{1}{j\omega C}$. Omdat 1/j gelijk is aan -j, geldt dus $Z_{ser} = R - \frac{1}{\omega C} \cdot j$.

b.

$$\left| Z_{ser} \right| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

c.

$\tan(\varphi) = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}$. Dit is gelijk aan $\tan(\varphi) = \frac{-1}{\omega RC}$.

d.

Bij lage frequenties (kleine ω) is de tweede term onder het wortelteken heel groot en is de impedantie dus ook heel groot.

Opgave 2

a.

$$\frac{1}{Z_{par}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \quad \text{dus} \quad Z_{par} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{R}{1 + \frac{R}{j\omega L}} = \frac{R}{1 - j\frac{R}{\omega L}}$$

b.

R

c.

$$\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}$$

d.

$$\left| Z_{par} \right| = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

e.

0º

f.

$$\tan(\varphi) = -\frac{R}{\omega L}$$

g.

$$\tan(\varphi) = \frac{R}{\omega L}$$

h.
Voor grote ω is de tweede term in de noemer van Z_{par} verwaarloosbaar ten opzichte van de eerste term. We houden dan over:

$Z_{par} = R$.

Voor hoge frequenties is de spoel een isolator en speelt dan geen rol in de parallelschakeling.

<u>Opgave 3</u>

a.

$\frac{1}{Z_{par}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$ Hieruit volgt: $Z_{par} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$

b.
Bij kleine ω is de tweede term van de noemer verwaarloosbaar en geldt Z_{par} = jωL.
Bij kleine ω is de condensator een isolator en speelt alleen de spoel een rol.

c.
Bij grote ω is de eerste term van de noemer verwaarloosbaar en geldt:

$Z_{par} = \frac{j\omega L}{-\omega^2 LC} = \frac{j}{-\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$.

Bij grote ω is de spoel een isolator en speelt alleen de condensator een rol.

d.
Als de noemer nul wordt, is de impedantie van de parallelschakeling oneindig groot.

Er geldt dan $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ en dus $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Uitwerkingen § 9

Opgave 1

a.

Bij hoge frequenties is de condensator een kortsluiting en is de uitgangsspanning dus (bijna) nul.

b.

$$H = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

c.

$$H = \frac{1}{1 + j\omega \cdot 2{,}2 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-8}} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-5}}$$

d.

Bij de kantelfrequentie is de modulus van Z_1 gelijk aan de modulus van Z_2.

In ons geval geldt dan: $\frac{1}{\omega C} = R$.

Hieruit volgt dan: $\omega = \frac{1}{RC}$ en dus: $f = \frac{1}{2\pi RC}$.

e.

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot 2{,}2 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-8}} = 7{,}2\,\text{kHz}$$

f.

Frequenties die flink hoger zijn dan de kantelfrequentie (= 7,2 kHz) worden slecht doorgelaten.

g.

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^5 = 6{,}3 \cdot 10^5$ rad/s

$$H = \frac{1}{1 + j \cdot 6{,}3 \cdot 10^{5} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{1 + j \cdot 13{,}9}.$$

In de noemer overheerst de term $j \cdot 13{,}9$. We kunnen dus bij benadering zeggen dat de uitgangsspanning 13,9 keer zo klein is als de ingangsspanning.

De uitgangsspanning is dus 3 V_{pp} / 13,9 = 0,22 V_{pp}.

Opgave 2
a.
Bij lage frequenties is een spoel een kortsluiting. De schakeling moet dus een hoogdoorlaatfilter zijn.
b.
$$H = \frac{j\omega L}{j\omega L + R}$$
c.
Bij hoge frequenties is ωL veel groter dan R.
Dan geldt dus bij benadering H = 1.
Dit resultaat is logisch want voor hoge frequenties is een spoel een isolator en kun je hem in de schakeling wegdenken.
d.
Bij lage frequenties is ωL veel kleiner dan R.
Dan geldt dus bij benadering H = jω(L/R).
e.
De uitgangsspanning loopt een kwart periode voor op de ingangsspanning. Dit zie je aan de j in H = jω(L/R).
f.
De modulus van jωL is gelijk aan de modulus van R.
Dus geldt: $\omega = \frac{R}{L}$ en dus $f = \frac{R}{2\pi L}$

Opgave 3
a.
$$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$
$$Z_{LC} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$
b.
$$H = \frac{Z_{LC}}{Z_{LC} + Z_R} = \frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} + R} = \frac{j\omega L}{j\omega L + R - \omega^2 RLC}$$
c.
Van $\frac{j \cdot b}{j \cdot b + a}$ is de modulus van de teller gelijk aan b en de modulus van de noemer gelijk aan $\sqrt{a^2 + b^2}$. De modulus van de noemer is dus altijd groter dan de modulus van de teller behalve als a = 0 want dan zijn de moduli gelijk aan elkaar.
Bij de schakeling is H = 1 dus alleen als geldt $R - \omega^2 RLC = 0$. Hieruit volgt:
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$