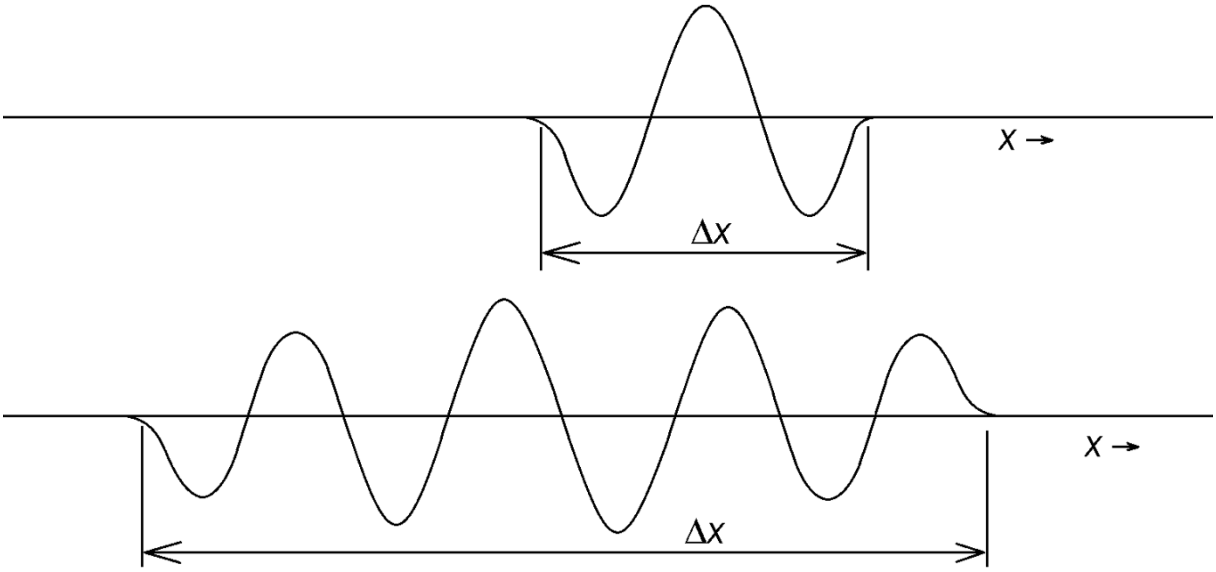
Onbepaaldheidsrelatie voor plaats en impuls

Volgens de onzekerheidsrelatie van Heisenberg is het onmogelijk om de plaats x en impuls p van een foton of materiedeeltje tegelijkertijd precies te meten. Als je de plaats nauwkeurig meet, kun je de impuls niet nauwkeurig meten. Omgekeerd kun je, als je de impuls nauwkeurig meet, de plaats niet nauwkeurig meten. Het verband tussen de onzekerheid Δx in de plaats en de onzekerheid Δp in de impuls wordt door de volgende formule beschreven.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

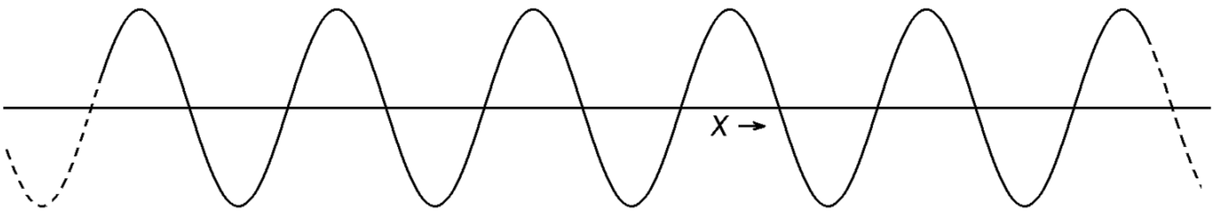
In de volgende tekst wordt geprobeerd de onzekerheidsrelatie van Heisenberg aannemelijk maken. Een foton of materiedeeltje kun je opvatten als een golfpakket of kortweg golf. In de volgende figuren zijn twee van zulke golven getekend. De golven bevinden zich in een gebied ter grootte Δx. Bij de bovenste golf is Δx kleiner dan bij de onderste golf. Dat betekent dat de plaats van het deeltje daar beter bekend is dan bij de onderste golf.



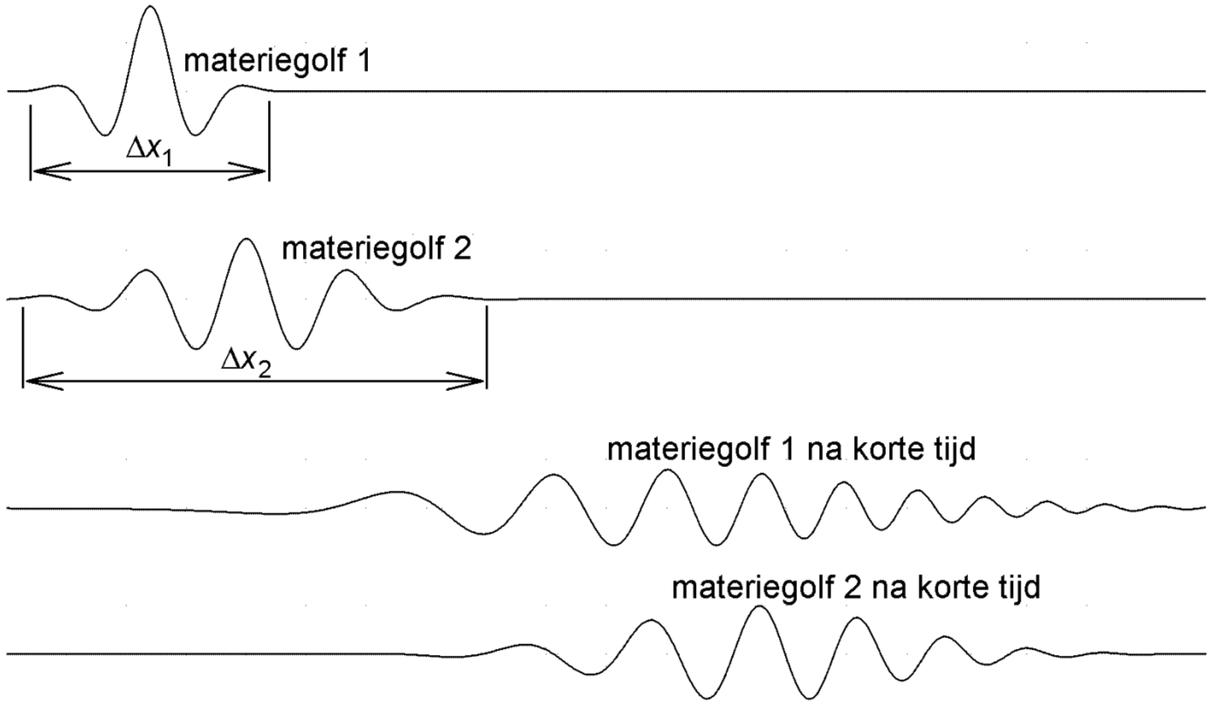
Echter, bij de onderste golf is de golflengte beter gedefinieerd dan bij de bovenste golf. Bedenk daarbij dat in het begrip golflengte een herhalend karakter besloten zit. Hoe groter het aantal herhalingen is, des te beter de golflengte vastligt. Omdat de golflengte en de impuls rechtstreeks aan elkaar gekoppeld zijn, is de impuls in het onderste geval ook beter gedefinieerd. Bij de onderste golf is Δp dus kleiner dan bij de bovenste golf. Samenvattend kun je dus zeggen dat hoe groter Δx is, des te kleiner Δp is en omgekeerd.

Je zou het effect van het aantal herhalingen een beetje kunnen vergelijken met iemand die zegt dat zijn nieuwe buurman elke zaterdag zijn auto wast. Na twee keer dat gezien te hebben, is zijn uitspraak wat gewaagd. Echter, na twintig keer is zijn uitspraak geloofwaardig geworden.

De onderstaande golf toont een extreem geval. Deze (sinusvormige) golf loopt van min oneindig naar plus oneindig. Dit betekent dat de plaats van het foton of deeltje totaal onbekend is (Δx = oneindig groot). Omgekeerd is de golflengte van de golf exact bekend. Daarmee is de impuls ook exact bekend ($\Delta p = 0$).



In de onderstaande vier diagrammen beweegt een deeltje naar rechts. In het bovenste diagram bevindt het deeltje zich in een relatief klein gebied Δx_1. De bijbehorende materiegolf 1 heeft dus relatief veel golflengtes in zich. In het tweede diagram bevindt het deeltje zich in een veel groter gebied Δx_2. De bijbehorende materiegolf 2 bevat dus veel minder golflengtes dan materiegolf 1.



In de onderste twee diagrammen zijn de materiegolven op een later tijdstip getekend. Opvallend is dat de kleine golflengtes aan de voorkant van de golf zitten en de grote golflengtes aan de achterkant. Dit volgt uit de formule $p = h/\lambda$. Hoe kleiner de golflengte namelijk is, des te groter de impuls en daarmee de snelheid is. Als we de onderste twee materiegolven met elkaar vergelijken, valt het op dat materiegolf 1 aan de voor- en achterkant aanzienlijk meer kleine en grote golflengtes heeft dan materiegolf 2. Dit is in overeenstemming met het feit dat de golflengte van materiegolf 2 beter vastligt.

We keren nu terug naar de bovenste figuren. We kunnen hierbij een schatting maken van het golfgetal. Als er N golflengtes in gebied Δx passen (dus Δx = N·λ), geldt voor het golfgetal:

$$k = \frac{2\pi \cdot N}{\Delta x}.$$

Zoals hiervoor is uitgelegd, ligt de golflengte en dus ook het golfgetal niet exact vast. Een zeer ruwe schatting van de onbepaaldheid in k vinden we door te stellen dat N mogelijk 1 meer of minder is. Voor de onbepaaldheid in k geldt dan:

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x}$$

Hieruit volgt:

$$\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$$

Als we het linker- en rechterlid van de laatste vergelijking met h/(2π) vermenigvuldigen, vinden we:

$$\Delta x \cdot \Delta p = h$$

Dit resultaat lijkt op de onzekerheidsrelatie van Heisenberg. De afwezigheid van 4π in de noemer is niet verwonderlijk, als je bedenkt dat onze aanpak slechts zeer globaal en oppervlakkig was.

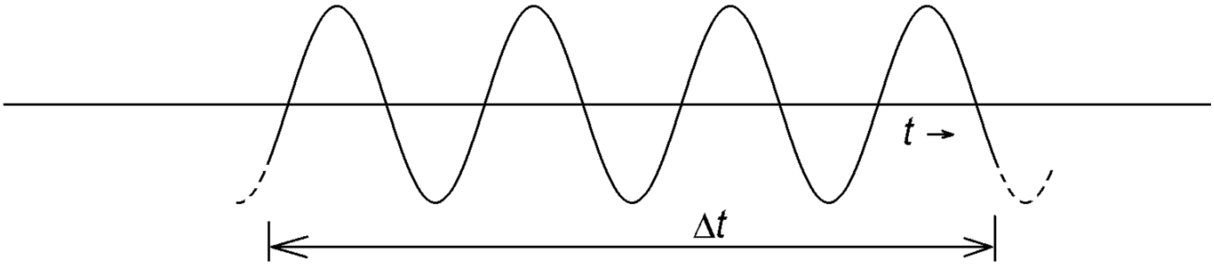
Onbepaaldheidsrelatie voor tijd en energie

Stel dat een deeltje gedurende tijdsduur Δt in een bepaalde energietoestand zit. Als Δt klein is, is de onbepaaldheid ΔE van de energie van het deeltje in verhouding groot. Naarmate Δt groter wordt, zal de energie van het deeltje beter gedefinieerd zijn. Het product van Δt en ΔE heeft volgens de tweede onzekerheidsrelatie van Heisenberg een theoretische ondergrens. Zie de volgende vergelijking.

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}$$

Stel bijvoorbeeld dat een elektron binnen een atoom van de grondtoestand naar een aangeslagen toestand gaat en daarna weer terugvalt naar de grondtoestand. Als de gemiddelde levensduur van de aangeslagen toestand groot is, is de energiebreedte van deze aangeslagen toestand klein. Omgekeerd is bij een kleine gemiddelde levensduur de energiebreedte groot.

Je kunt de bovenstaande relatie op dezelfde manier aannemelijk maken als de onzekerheidsrelatie voor plaats en impuls. Zie de onderstaande figuur.



Stel dat het deeltje gedurende tijdsduur Δt een bepaalde energietoestand heeft. Als er N periodes in deze tijdsduur zitten, is een ruwe schatting voor de hoekfrequentie:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot N}{\Delta t}$$

Voor de onzekerheid Δω geldt dan ruwweg:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}.$$

Hieruit volgt:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi.$$

Met de vergelijking $E = \hbar \cdot \omega$ geldt dan:

$$\Delta t \cdot \Delta E = h.$$