Extra theorie over de harmonische beweging

Benodigde wiskundige voorkennis

Benodigde natuurkundige voorkennis

Wiskundige uitwerking van de harmonische trilling

Benodigde wiskundige voorkennis

Stap 1: de afgeleide van twee elementaire functies: sinus en cosinus

In het volgende betekent sin(x) de sinus van x. Hierin is x in radialen en dus niet in graden uitgedrukt. Dit geldt analoog voor de cosinus van x.

Als $f(x) = \sin(x)$ dan $f'(x) = \cos(x)$

Als $f(x) = \cos(x)$ dan $f'(x) = -\sin(x)$

Stap 2: een veralgemenisering van deze elementaire functie

Stel dat A een constante is. Dan geldt het volgende.

Als $f(x) = A\cdot\sin(x)$ dan $f'(x) = A\cdot\cos(x)$

Als $f(x) = A\cdot\cos(x)$ dan $f'(x) = -A\cdot\sin(x)$

Stap 3: een andere veralgemenisering van deze elementaire functie

Stel dat ω een constante is. Dan geldt het volgende.

Als $f(x) = \sin(\omega\cdot x)$ dan $f'(x) = \omega\cdot\cos(\omega\cdot x)$

Als $f(x) = \cos(\omega\cdot x)$ dan $f'(x) = -\omega\cdot\sin(\omega\cdot x)$

Stap 4: combinatie van beide veralgemeniseringen

Als $f(x) = A\cdot\sin(\omega\cdot x)$ dan $f'(x) = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot x)$

Als $f(x) = A\cdot\cos(\omega\cdot x)$ dan $f'(x) = -A\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot x)$

Stap 5: de dubbele afgeleide van de veralgemeniseerde sinusfunctie

Als $f(x) = A\cdot\sin(\omega\cdot x)$ dan $f'(x) = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot x)$ en $f''(x) = -A\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot x)$

Stap 6: de overstap naar trillingen in de natuurkunde

Bij harmonische trillingen wordt de letter f (van functie) vervangen door u (van uitwijking). Bovendien wordt de letter x vervangen door de letter t (van tijd).
Dan krijgen we dus:

$u(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t)$

Voor de tweede afgeleide van u(t) geldt dan:

$u''(t) = -A\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)$

De letter A stelt de amplitude van de trilling voor.
De letter ω is de hoeksnelheid. Deze kennen we bij cirkelbewegingen. Wat heeft dat met een trillinde beweging te maken? Ogenschijnlijk niks. Toch is de stap van een cirkelbeweging naar een trilling klein. De uitwijking bij een trillend voorwerp komt namelijk overeen met één coördinaat (bijvoorbeeld de y-coördinaat) van een deeltje dat een cirkelbeweging uitvoert.
De trillingstijd volgt uit de hoeksnelheid volgens:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Benodigde natuurkundige voorkennis

Deel 1: kinematica algemeen

De plaats van een deeltje geven we weer met x. Als het deeltje beweegt is x afhankelijk van de tijd. Zodoende krijgen we de plaatsfunctie x(t). Overigens spreken we bij een trillend deeltje van de uitwijking in plaats van de plaats en gebruiken we u(t) in plaats van x(t).

In het algemeen is de snelheid v van het deeltje ook tijdsafhankelijk. In dit verband spreken we over de snelheidsfunctie v(t). Ook is de versnelling a van het deeltje algemeen tijdsafhankelijk. Daarom spreken we over de versnellingsfunctie a(t).

De snelheid v van het deeltje vinden we door de plaats x(t) naar de tijd te differentieren. Vroeger noemden we dat de “raaklijnmethode”. En schreven we:

$$v = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]_{\text{RAAKLIJN}}$$

In de huidige notatie geldt: $v(t) = x'(t)$.

Op dezelfde manier vinden we de versnelling a van het deeltje door de snelheid v(t) naar de tijd te differentieren. In het verleden schreven we dit op als:

$$a = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]_{\text{RAAKLIJN}}$$

Nu noteren we het als: $a(t) = v'(t)$

Uit het bovenstaande volgt dat de versnellingsfunctie uit de plaatsfunctie volgt door deze twee maal naar de tijd te differentieren. Wiskundig schrijven we dit als:

$a(t) = x''(t)$.

Bij trillende voorwerpen geldt op dezelfde manier:

$a(t) = u''(t)$

Deel 2: tweede wet van Newton

De tweede wet van newton luidt:

$F_R = m \cdot a$

Deel 3: Wet van Hooke

Voor veel systemen met een evenwichtsstand is de (resulterende) kracht evenredig met de uitwijking. De evenredigheidsconstante wordt met C aangeduid en is de zogenaamde “veerconstante” of “krachtconstante”. Er geldt dan:

$F_R = -C \cdot u$
Het minteken houdt verband met het feit dat de kracht de uitwijking steeds wil verkleinen.

Wiskundige uitwerking van de harmonische trilling

Uitgangspunt is de tweede wet van de grote meester.

$F_R = m \cdot a$

Als we de wet van Hooke hierin substitueren krijgen we:

$-C \cdot u = m \cdot a$

Met de theorie van de kinematica kunnen we dit herschrijven tot:

$-C \cdot u = m \cdot u''$

Als we in deze laatste vergelijking $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ substitueren krijgen we:

$-C \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) = -m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Als we hiervan beide termen delen door $-A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ontstaat:

$C = m \cdot \omega^2$

Hieruit volgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

Met
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
vinden we tenslotte de uitdrukking voor T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$$