

Relativiteit (deel 2)

- § 1 Impuls (klassiek)
- § 2 Elastische en inelastische botsingen (klassiek)
- § 3 Relativistische impuls en energie van materiedeeltjes
- § 4 Verband tussen impuls en energie (relativistisch)
- § 5 Wisselwerking tussen (sub)atomaire deeltjes; grafische weergave
- § 6 Wisselwerking tussen (sub)atomaire deeltjes; berekeningen
- § 7 Massadefect bij kernreacties
- § 8 Bindingsenergie van atoomkernen

Bijlage: Afleiding van formules met relativistische impuls en energie

§ 1 Impuls (klassiek)

Inleiding

In deze paragraaf kijken we naar voorwerpen die op elkaar botsen en/of uit elkaar knallen. Daarbij staat de grootte 'impuls' centraal. In de volgende paragraaf wordt naast de impuls ook naar de 'kinetische energie' van voorwerpen gekeken. In deze paragrafen worden beide begrippen behandeld volgens de klassieke mechanica. In de derde paragraaf gebeurt dit relativistisch.

Impuls van een voorwerp

Onder de 'impuls' p van een voorwerp met massa m en snelheid v verstaan we het product van massa en snelheid. Soms wordt de impuls ook wel de 'hoeveelheid van beweging' genoemd. In formulevorm is dit:

$$p = m \cdot v$$

Stel bijvoorbeeld dat een voorwerp een massa van 4,0 kg en een snelheid van 5,0 m/s heeft. Voor de impuls van het voorwerp geldt dan: $p = 4,0 \cdot 5,0 = 20 \text{ kgm/s}$. Als het voorwerp niet in de positieve, maar in de negatieve richting van de plaatsas (x-as) zou bewegen, zijn zowel de snelheid als de impuls negatief. We krijgen dan bijvoorbeeld: $p = 4,0 \cdot -5,0 = -20 \text{ kgm/s}$. De impuls heeft net als de snelheid een grootte en een richting en is dus een vector.

Als er op het voorwerp een constante kracht F over een zekere tijd Δt werkt, noemen we het product van F en Δt de 'stoot' van de kracht. De stoot op het voorwerp is gelijk aan de impulsverandering van het voorwerp. Er geldt dus:

$$F \cdot \Delta t = \Delta(m \cdot v).$$

Deze formule is eenvoudig af te leiden. Omdat de massa m constant is, kunnen we de bovenstaande formule namelijk schrijven als: $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$ en dat is de tweede wet van Newton (die meestal geschreven wordt als $F = m \cdot a$).

Wet van behoud van impuls

Als twee of meer voorwerpen krachten op elkaar uitoefenen waarbij er geen krachten van buitenaf op de voorwerpen werken, geldt de wet van behoud van impuls. Deze luidt als volgt. Voor een afgesloten groep voorwerpen (of deeltjes) is de totale impuls constant.

De wet van behoud van impuls is makkelijk te bewijzen. Als twee voorwerpen A en B een kracht op elkaar uitoefenen, is volgens de derde wet van Newton de kracht F_{AB} van A op B even groot als maar tegengesteld gericht aan de kracht F_{BA} van B op A. Kort opgeschreven is dit:

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

De stoot op A is dan ook even groot maar tegengesteld aan de stoot op B. Dus wat A aan impuls wint (verliest), moet B aan impuls verliezen (winnen).

In de rest van deze paragraaf beperken we ons tot twee voorwerpen. Neem het volgende voorbeeld dat in de onderstaande figuur is getekend. Blok A en blok B bevinden zich op een zeer gladde vloer (wrijvingskrachten zijn verwaarloosbaar). Van blok A bedraagt de massa 1 kg en van blok B 2 kg. Blok A botst met een snelheid van 6 m/s op blok B, dat tot dan nog in rust is. Na de botsing beweegt blok A met 2 m/s naar links en blok B met 4 m/s naar rechts.



De totale impuls voor de botsing is: $p(\text{totaal,voor}) = 1 \times 6 + 2 \times 0 = 6 \text{ kgm/s}$.
 De totale impuls na de botsing is: $p(\text{totaal,na}) = 1 \times (-2) + 2 \times 4 = 6 \text{ kgm/s}$.
 Zoals verwacht, is de totale impuls voor de botsing dus gelijk aan de totale impuls na de botsing.

Voorbeeld van een opgave

Uit een geweer met een massa van 11 kg wordt een kogel van 130 g afgeschoten. De kogel krijgt een snelheid van 100 m/s. Bereken de snelheid van het geweer direct na het schot.

Oplossing

Vóór het moment van het schot is de impuls van het geweer met kogel nul.

Na het moment van het schot moet de totale impuls dus ook nul zijn.

Voor de impuls van de kogel geldt: $p(\text{kogel,na}) = 0,13 \times 100 = 13 \text{ kgm/s}$.

De bewegingsrichting van de kogel is hierbij positief genomen.

De impuls van het geweer is dan dus: $p(\text{geweer,na}) = -13 \text{ kgm/s}$.

Voor de snelheid van het geweer geldt dan:

$$v(\text{geweer,na}) = p(\text{geweer,na}) / m(\text{geweer}) = -13 / 11 = -1,2 \text{ m/s}$$

Deze snelheid is negatief en is dus tegengesteld aan de richting, waarin de kogel beweegt. Dat betekent dat het geweer met een snelheid van 1,2 m/s tegen het lichaam van de schutter drukt. Dit staat bekend als de terugslag van een vuurwapen.

Opgaven bij § 1

Opgave 1

Een kanon heeft een massa van 1200 kg en schiet een kogel met een massa van 15 kg weg met een snelheid van 60 m/s. Bereken de snelheid van het kanon in achterwaartse richting direct na het afvuren van de kogel.

Opgave 2

Een boogschutter schiet met een pijl van 50 g op een appel van 200 g die op een paal gelegd is. Voordat de pijl de appel binnen dringt, heeft deze een snelheid van 20 m/s. De pijl blijft in de appel steken en samen vliegen ze verder. Bereken de snelheid van de appel (en de pijl) nadat deze door de pijl getroffen is.

Opgave 3

Een kogel A (massa = 3,0 kg) heeft een snelheid van 8,0 m/s naar rechts. A botst centraal tegen een kogel B (massa = 2,0 kg) die een snelheid van 7,0 m/s naar links heeft. Na de botsing beweegt kogel B met een snelheid van 6,0 m/s naar rechts. Bereken de snelheid van kogel A na de botsing. Neem bij de berekeningen naar rechts positief.

Opgave 4

In deze opgave gebruiken we de 'atomaire massa-eenheid' met symbool u . Een proton met een massa van $1,0 u$ (afgerond op één decimaal) botst centraal met een snelheid van $1,0 \cdot 10^7$ m/s tegen een stilstaande heliumkern. Het proton kaatst terug met een snelheid van $0,6 \cdot 10^7$ m/s. De heliumkern krijgt een snelheid van $0,4 \cdot 10^7$ m/s.

Bereken de massa van de heliumkern. De impuls van de deeltjes kan hierbij het beste in de eenheid ' $u \cdot m/s$ ' worden uitgedrukt.

Opgave 5

Een raket in de ruimte kan zijn snelheid vergroten door aan de achterkant verbrandingsgassen uit te stoten en deze gassen een hoge snelheid mee te geven. Stel dat een raket met een massa van 500 kg in een milliseconde (ms) een hoeveelheid gas met een massa van $0,015$ kg uitstoot en dit gas een snelheid meegeeft van 100 m/s, gerekend ten opzichte van de raket. Bereken dan de versnelling van de raket. Tip: verplaats jezelf in het gemeenschappelijke zwaartepunt van de raket en het uitgestoten gas.

§ 2 Elastische en inelastische botsingen (klassiek)

Kinetische energie

Voor de 'kinetische energie' E_K van een voorwerp met massa m en snelheid v geldt:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Stel weer dat een voorwerp een massa van 4,0 kg en een snelheid van 5,0 m/s heeft. Voor de kinetische energie van het voorwerp geldt dan:

$E_K = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 5,0^2 = 50 \text{ J}$. Ongeacht de richting van de snelheid kan de kinetische energie nooit een negatieve waarde krijgen.

Als er op het voorwerp een constante kracht F over een zekere afstand s werkt, noemen we het product van F en s de 'arbeid' van de kracht (F moet dan wel in de bewegingsrichting werken). Als het voorwerp in het begin in rust is (zijn kinetische energie is dan nul), is de eindwaarde van de kinetische energie even groot als deze arbeid. Er geldt dan dus: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = F \cdot s$

Elastische en inelastische botsingen

We beperken ons in de volgende bespreking tot centrale botsingen van twee voorwerpen. Dat zijn botsingen waarbij alle snelheden langs één en dezelfde lijn gericht zijn. Zie bijvoorbeeld het bovenstaande voorbeeld met de blokken A en B. We kunnen bij zo'n centrale botsing in het algemeen twee fasen van het botsingsproces onderscheiden. In de eerste fase neemt de snelheid van de twee voorwerpen ten opzichte van elkaar af. Hierbij wordt kinetische energie (ten dele) omgezet in elastische (veer)energie. De eerste fase eindigt als beide voorwerpen dezelfde snelheid hebben gekregen; hun vormverandering is dan maximaal. In de tweede fase proberen de onderlinge krachten de vormverandering weer ongedaan te maken. Hierbij wordt de elastische energie (veerenergie) weer omgezet in kinetische energie. De tweede fase eindigt (en daarmee ook het botsingsproces) zodra de voorwerpen geen krachten meer op elkaar uitoefenen.

We kunnen bij botsingen twee grensgevallen onderscheiden namelijk:

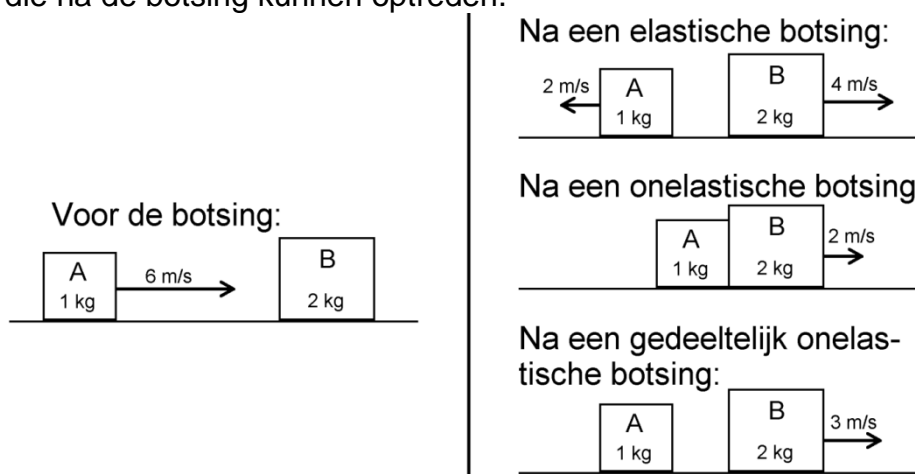
- 1) Elastische botsingen;
- 2) Inelastische botsingen.

Tussen deze twee grensgevallen liggen de gedeeltelijk inelastische botsingen.

Bij elastische botsingen worden gedurende de tweede fase van het botsingsproces de vormveranderingen van de beide voorwerpen geheel ongedaan gemaakt. Het gevolg is dat de totale kinetische energie na de botsing even groot is als de totale kinetische energie voor de botsing. Bij inelastische botsingen ontbreekt de tweede fase van het botsingsproces geheel. Beide voorwerpen gaan als één geheel verder. Er gaat een maximum aan kinetische energie verloren. Bij gedeeltelijk inelastische botsingen bewegen de voorwerpen na de botsing wel uit elkaar maar is de totale kinetische energie na de botsing kleiner dan die voor de botsing.

Voorbeeld

Neem het volgende voorbeeld dat een uitbreiding is van het voorbeeld uit de vorige paragraaf. Zie ook de onderstaande figuur. In de figuur zijn drie situaties getekend die na de botsing kunnen optreden.



In alle gevallen wordt aan de wet van behoud van impuls voldaan Zie hieronder.

Voor de botsing geldt:

$$p(\text{totaal,voor}) = 1 \times 6 + 2 \times 0 = 6 \text{ kgm/s.}$$

Na de elastische botsing geldt:

$$p(\text{totaal,na}) = 1 \times (-2) + 2 \times 4 = 6 \text{ kgm/s.}$$

Na de inelastische botsing geldt:

$$p(\text{totaal,na}) = (1+2) \times 2 = 6 \text{ kgm/s.}$$

Na de gedeeltelijk onel. botsing geldt:

$$p(\text{totaal,na}) = 1 \times 0 + 2 \times 3 = 6 \text{ kgm/s.}$$

Nu kijken we naar de kinetische energieën.

Voor de botsing geldt:

$$E_k(\text{totaal,voor}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 = 18 \text{ J.}$$

Na de elastische botsing geldt:

$$E_k(\text{totaal,na}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 18 \text{ J.}$$

Na de inelastische botsing geldt:

$$E_k(\text{totaal,na}) = \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2^2 = 6 \text{ J.}$$

Na de gedeeltelijk onel. botsing geldt:

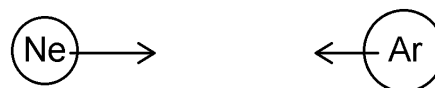
$$E_k(\text{totaal,na}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9 \text{ J.}$$

Bij de elastische botsing gaat er geen kinetische energie verloren, want zowel voor als na de botsing bedraagt deze 18 J. Bij de inelastische botsing gaat er een maximum aan kinetische energie verloren. In ons voorbeeld is dit $18 \text{ J} - 6 \text{ J} = 12 \text{ J}$. Bij macroscopische voorwerpen wordt dit warmte en veerenergie in de voorwerpen. Bij de gedeeltelijk inelastische botsing wordt er minder dan 12 J aan energie omgezet in warmte (en veerenergie). De mate, waarin de botsing inelastisch is, wordt bepaald door de elasticiteit van de voorwerpen A en B.

Bij elastische botsingen ondergaan de voorwerpen in de tweede fase van het botsingsproces dezelfde snelheidsverandering als in de eerste fase. Met deze regel vinden we de snelheid van beide voorwerpen na zo'n elastische botsing. We gebruiken hierbij de inelastische botsing als einde van de eerste fase. Neem bijvoorbeeld blok A in ons voorbeeld. Vóór de botsing was zijn snelheid 6 m/s en na de eerste fase 2 m/s. De snelheid van blok A is dus met 4 m/s afgenomen. In de tweede fase neemt de snelheid van A dus weer met 4 m/s af. De eindsnelheid van A is bij een elastische botsing dus $2 - 4 = -2 \text{ m/s}$. Voor blok B gaat dit analoog. In de eerste fase van de botsing neemt zijn snelheid toe met 2 m/s. Na de tweede fase van de botsing is zijn snelheid dus 4 m/s.

Voorbeeld van een opgave

In de figuur hiernaast beweegt een neonatoom (massa 20,0 u) met 500 m/s naar rechts en een argonatoom (massa 40,0 u) met 175 m/s naar links.



Beide atomen botsen centraal en elastisch op elkaar. Bereken de snelheid (in m/s) van het neonatoom na de botsing.

Oplossing

Voor de impuls voor de botsing geldt:

$$p(\text{voor}) = m(\text{Ne}) \cdot v(\text{Ne}) + m(\text{Ar}) \cdot v(\text{Ar}) = 20,0 \cdot 500 - 40,0 \cdot 175 = 3000 \text{ um/s}$$

Als de botsing inelastisch zou zijn, zou voor de snelheid gelden:

$$v(\text{na, onelastisch}) = \frac{p(\text{voor})}{m(\text{Ne}) + m(\text{Ar})} = \frac{3000 \text{ um/s}}{(20,0 + 40,0) \text{ u}} = 50 \text{ m/s}$$

De botsing is echter elastisch. Voor de snelheidsverandering van het neonatoom tijdens de eerste fase van de botsing geldt:

$$\Delta v = 50 - 500 = -450 \text{ m/s}$$

Voor de snelheid van het neonatoom na de botsing geldt dan:

$$v(\text{na, elastisch}) = 50 - 450 = -400 \text{ m/s}$$

Na de botsing beweegt het neonatoom dus met 400 m/s naar links.

Opgaven bij § 2

Opgave 1

Geef aan of de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

a)

De impuls van een bewegend deeltje heeft een richting.

b)

De kinetische energie van een bewegend deeltje heeft een richting.

c)

Als de snelheid van een deeltje verdubbelt, verdubbelt ook zijn impuls.

d)

Als de snelheid van een deeltje verdubbelt, verdubbelt ook zijn kinetische energie.

e)

Bij botsingen van voorwerpen geldt altijd de wet van behoud van impuls.

f)

Bij botsingen van voorwerpen geldt altijd de wet van behoud van kinetische energie.

g)

De kinetische energie gedeeld door de impuls van een bewegend voorwerp is evenredig met zijn massa.

h)

De kinetische energie gedeeld door de impuls van een bewegend voorwerp is evenredig met zijn snelheid.

Opgave 2

Een boogschutter schiet met een pijl van 50 g op een appel van 200 g die op een paal gelegd is. Voordat de pijl de appel binnen dringt, heeft deze een snelheid van 20 m/s. De pijl blijft in de appel steken en samen vliegen ze verder.

a.

Bereken de snelheid van de appel (en de pijl) nadat deze door de pijl getroffen is.

b.

Bereken hoeveel kinetische energie verloren gaat als de pijl zich in de appel dringt.

Opgave 3

Een kogel A (massa = 3,0 kg) heeft een snelheid van 8,0 m/s naar rechts. A botst centraal tegen een kogel B (massa = 2,0 kg) die een snelheid van 7,0 m/s naar links heeft. Neem bij de berekeningen naar rechts positief.

a.

Toon aan dat de snelheid na een volkomen inelastische botsing (dus als beide kogels als één geheel verder zouden gaan) 2,0 m/s zou zijn.

b.

Bereken hoeveel kinetische energie er bij deze botsing verloren is gegaan.

c.

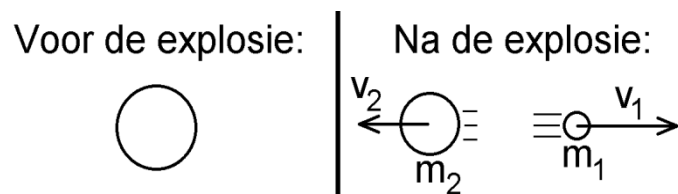
Bereken de snelheid van de kogels A en B na de botsing als deze volkomen elastisch zou zijn.

Opgave 4

Een neutron (massa 1,0 u) botst tegen een stilstaande heliumkern (massa 4,0 u) op. De botsing is centraal en elastisch. Voor de botsing is de snelheid van het neutron 10,0 km/s. Bereken de snelheid van het neutron na de botsing.

Opgave 5

In de figuur hiernaast explodeert een stilstaand voorwerp. Hierbij ontstaan er twee ongelijke delen die uit elkaar vliegen. Neem aan dat het zwaarste deel een n keer zo grote massa heeft als het lichtste deel. In de figuur is m_2 dus n keer zo groot als m_1 . Deze situatie komt bijvoorbeeld voor bij alfaverval van een instabiele atoomkern. Het alfadeeltje is dan veel en veel lichter dan de overgebleven atoomkern.



a.

Toon aan dat de snelheid v_1 van het lichtste deel n keer zo groot is als de snelheid v_2 van het zwaarste deel (laat het teken van de snelheden buiten beschouwing).

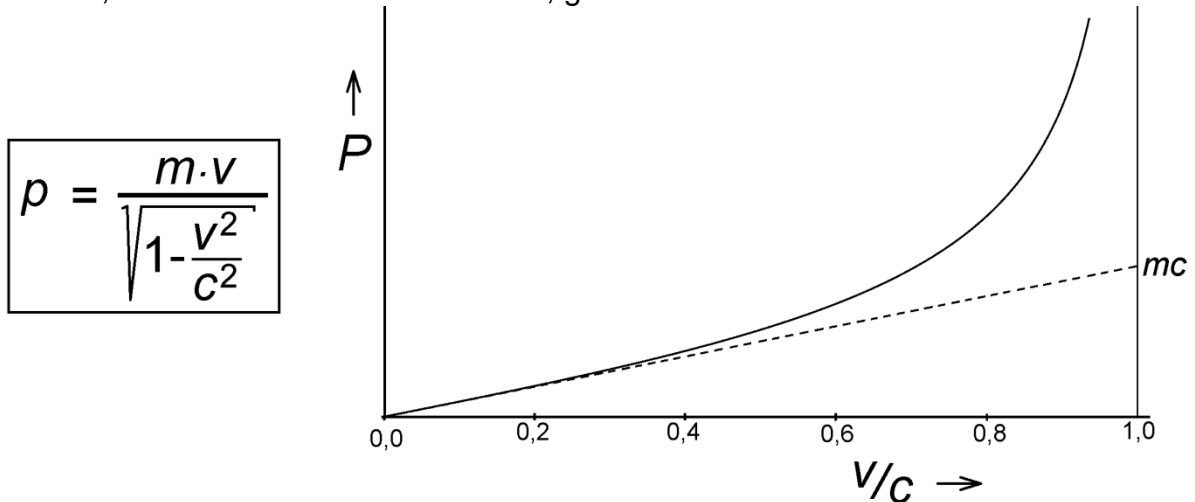
b.

Toon aan dat de kinetische energie $E_{K,1}$ van het lichtste deel n keer zo groot is als de kinetische energie $E_{K,2}$ van het zwaarste deel.

§ 3 Relativistische impuls en energie van materiedeeltjes

Relativistische impuls

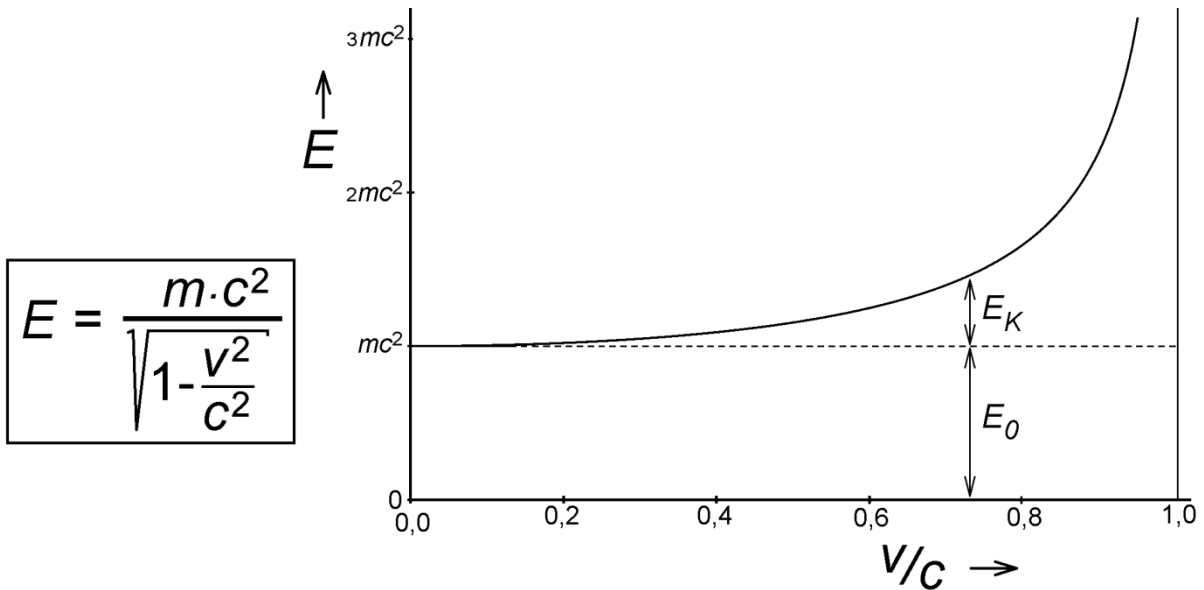
Ook in de relativistische mechanica kan aan een voorwerp (of deeltje) met massa m en snelheid v een impuls p worden toegekend. Zoals in de bijlage wordt bewezen, geldt hiervoor de onderstaande omkaderde formule. De letter c stelt, zoals altijd, de lichtsnelheid voor. Rechts van de formule is het verband tussen de impuls en de snelheid, als fractie van de lichtsnelheid, getekend.



Voor kleine snelheden (v veel kleiner dan c) gaat de relativistische impuls over in de klassieke impuls $p = m \cdot v$. De stippellijn in het diagram geeft dit verband weer. Bij de lichtsnelheid bedraagt de klassieke impuls natuurlijk mc . De relativistische impuls gaat bij toenemende snelheid echter steeds meer afwijken van de klassieke impuls omdat de noemer van de breuk in de formule dan steeds kleiner wordt. Bij de lichtsnelheid wordt de noemer nul en de impuls oneindig groot. Daarom kan een voorwerp de lichtsnelheid hooguit benaderen.

Relativistische energie

In de relativistische mechanica heeft een voorwerp (of deeltje) met massa m en snelheid v een totale energie E waarvoor de onderstaande omkaderde formule geldt. Zie de bijlage voor het bewijs. Rechts van de formule is het verband tussen de energie en de snelheid, als fractie van de lichtsnelheid, getekend. Net als hierboven blijkt hieruit dat het voorwerp nooit met de lichtsnelheid kan bewegen omdat zijn energie dan oneindig groot zou moeten zijn.



We kunnen de energie E opgebouwd denken uit twee bijdragen namelijk de zogenoemde rustenergie E_0 en de kinetische energie E_K . De rustenergie is onafhankelijk van de snelheid en hiervoor geldt:

$$E_0 = m \cdot c^2.$$

De kinetische energie is snelheidsafhankelijk en is alleen nul als het voorwerp in rust is.

We kunnen het rechter lid van de formule schrijven als de volgende, oneindig lange, reeks:

$$E = \underbrace{m \cdot c^2}_{\text{rustenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{3}{8} \cdot m \cdot \frac{v^4}{c^2} + \frac{15}{48} \cdot m \cdot \frac{v^6}{c^4} + \dots}_{\text{kinetische energie}}$$

De eerste term van het rechter lid is de rustenergie van het deeltje. Alle volgende termen vormen samen de kinetische energie (bewegingsenergie) van het deeltje. De tweede term ($\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$) is groter dan de derde term; de derde term is weer groter dan de vierde term enzovoort. Als de snelheid klein is ten opzichte van de lichtsnelheid is de tweede term een goede benadering voor de kinetische energie. Dan geldt er dus:

$$E \approx \underbrace{m \cdot c^2}_{\text{rustenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}_{\text{kinetische energie}}$$

Ook in de klassieke natuurkunde stelt $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ de kinetische energie van een deeltje voor.

Wiskundige toelichting op de bovenstaande reeksontwikkeling

Uit de wiskunde volgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \beta^2 + \frac{3}{8} \cdot \beta^4 + \frac{15}{48} \cdot \beta^6 + \dots$$

Als we deze reeksontwikkeling toepassen op de formule voor E waarbij we β gelijk stellen aan v/c , krijgen we:

$$E = m \cdot c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48} \cdot \frac{v^6}{c^6} + \dots \right]$$

Deze vergelijking kan geschreven worden als die hiervoor gegeven was.

Opmerking over massa

Om spraakverwarring te voorkomen, spreken we af dat de massa m van een voorwerp of deeltje voor iedere waarnemer gelijk is en dus onafhankelijk van zijn snelheid v is. De massa kan door een waarnemer, voor wie het deeltje in rust is, worden bepaald door het deeltje bij wijze van spreken op een weegschaal te leggen. Tot het einde van de twintigste eeuw werd onderscheid gemaakt tussen rustmassa en relativistische massa. Hier wordt dat onderscheid niet gemaakt en wij verstaan onder de massa altijd de rustmassa.

Rustenergie en massa

De formule $E_0 = m \cdot c^2$ houdt in dat als een voorwerp massa heeft, er in dit voorwerp (zeer veel) rustenergie schuil gaat. Je zou massa kunnen omschrijven als 'ingepakte' of 'ingevroren' energie. Als je aan een stilstaand voorwerp energie toevoert en dit voorwerp daarbij in rust blijft, stijgt zijn rustenergie en stijgt in dezelfde verhouding ook zijn massa. Omgekeerd zal de massa van een stilstaand voorwerp dalen als het energie aan de omgeving afstaat. Neem daarbij de volgende voorbeelden.

1. Een hete steen geeft warmte aan zijn omgeving af en verliest daarbij massa.
2. Een ingedrukte spiraalveer schiet een kogel weg en verliest daarbij massa.
3. Een accu voorziet een lamp van elektrische energie en verliest daarbij massa.
4. Een aangeslagen atoom zendt een foton uit en verliest daarbij massa. Een aangeslagen atoom is dus zwaarder dan een atoom in de grondtoestand.

Door het feit dat het kwadraat van de lichtsnelheid zo groot is, zijn de massaafnames in de bovenstaande voorbeelden niet of nauwelijks merkbaar. Dit blijkt ook uit de volgende getallenvoorbeelden.

Getallenvoorbeeld 1

Een groot bekerglas is gevuld met 1 kg water van 100 °C. Als het water wordt afgekoeld tot 0 °C, komt hier 0,418 MJ aan warmte bij vrij. De rustenergie van het water neemt dan af met 0,418 MJ. De massa van het water neemt dan af met:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0,418 \cdot 10^6}{(3,0 \cdot 10^8)^2} = 4,6 \cdot 10^{-12} \text{ kg.}$$

Getallenvoorbeeld 2

Een spiraalveer met een veerconstante van 100 N/m is 0,10 m ingedrukt. Als hij naar de ongespannen toestand teruggaat, neemt de veerenergie af met 0,50 J. De massa van de veer neemt dan af met:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0,50}{(3,0 \cdot 10^8)^2} = 5,6 \cdot 10^{-18} \text{ kg}.$$

Tijdens de explosie van een bom wordt er in korte tijd veel energie aan de omgeving afgegeven. Dit betekent dat de massa van de materie, waar de bom van gemaakt is, iets afneemt. Dit geldt voor zowel een chemische bom als een kernbom. Stel bijvoorbeeld dat er in een chemische bom koolstof wordt verbrand. Dan is het inderdaad zo dat de massa van een CO₂-molecuul een heel klein beetje lager ligt dan de massa van een C-atoom plus de massa van een O₂-molecuul. Bij kernbommen geldt iets soortgelijks; alleen is de procentuele massa-afname daar veel groter.

Opgaven bij § 3

Opgave 1

Je verwarmt een groot blok ijzer. Bereken hoeveel warmte je aan het blok moet toevoeren om de massatoename van het blok een nanogram te laten zijn (nano = een miljardste).

Opgave 2

In de zon vindt kernfusie plaats en de zon is daardoor in staat om gedurende lange tijd zeer veel straling uit te zenden. Per seconde straalt de zon $3,85 \cdot 10^{26}$ J aan energie uit.

Bereken de massa-afname van de zon per seconde.

Opgave 3

Voor de kinetische energie E_K van een deeltje met massa m en snelheid v geldt:

$$E_K = m \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right].$$

a.

Bewijs deze formule.

b.

Als v veel kleiner is dan c , kan deze formule voor E_K sterk vereenvoudigd worden. Schrijf deze vereenvoudigde formule hieronder op.

Opgave 4

Een deeltje met massa m beweegt met 60% van de lichtsnelheid.

a.

Bereken hoeveel keer de (totale) energie van het deeltje groter is dan zijn rustenergie.

b.

Bereken hoeveel keer de kinetische energie van het deeltje groter is dan zijn rustenergie.

c.

Bereken bij welke snelheid van het deeltje de kinetische energie even groot is als de rustenergie.

Opgave 5

Zoals in de leestekst staat, geldt de volgende formule voor de energie E van een deeltje (de formule is iets anders geschreven):

$$E = m \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right].$$

Voor kleine snelheden kunnen we deze formule benaderen door:

$$E = m \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

We kunnen deze formule schrijven als:

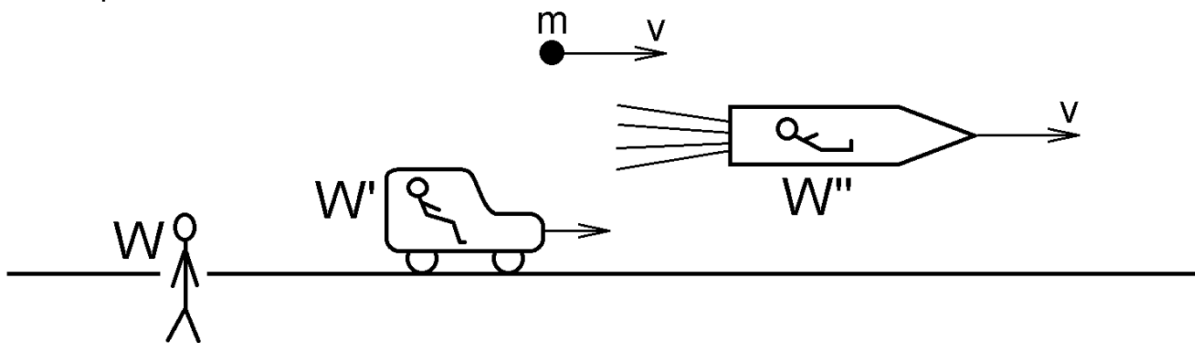
$$E = m \cdot c^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Ga bij drie snelheden, namelijk bij 30%, 50% en 70% van de lichtsnelheid, na hoe goed de laatste vergelijking de eerste vergelijking benadert. Doe dat door bij beide vergelijkingen de uitdrukking binnen de vierkante haken te berekenen. Bereken vervolgens de procentuele afwijking bij deze drie snelheden.

§ 4 Verband tussen impuls en energie (relativistisch)

Verband tussen relativistische impuls en energie

In de onderstaande figuur staat waarnemer W op de grond en ziet een voorwerp met massa m met een zeer grote snelheid v naar rechts bewegen. Waarnemer W' rijdt met zijn auto naar rechts en ziet het voorwerp ook naar rechts bewegen, alleen met een kleinere snelheid omdat W' zelf ook naar rechts beweegt. Waarnemer W'' vliegt in zijn raket naar rechts met dezelfde snelheid v als het voorwerp. Voor W'' staat het voorwerp dus stil.



We nemen aan dat alle drie de waarnemers inertiaalwaarnemers zijn die dus niet versnellen en/of vertragen. Voor de drie waarnemers is (de grootte van) de impuls p van het voorwerp verschillend. Voor W is p het grootst; voor W' is p kleiner en voor W'' is p zelfs nul. Ook is de energie E van het voorwerp verschillend voor de drie waarnemers. Voor W is E het grootst vanwege de grote hoeveelheid kinetische energie; voor W' is E kleiner en voor waarnemer W'' bestaat E alleen maar uit rustenergie (geen kinetische energie).

De grootheid $E^2 - p^2 c^2$ blijkt voor de drie waarnemers W , W' en W'' gelijk te zijn, namelijk $m^2 c^4$. Zie het bewijs in de bijlage. De laatst genoemde waarde is meteen duidelijk voor waarnemer W'' want voor hem is dit het kwadraat van de rustenergie.

Samenvattend kunnen we zeggen dat er het volgende verband tussen E en p bestaat.

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

In de speciale relativiteitstheorie komen we ook twee andere grootheden tegen waar alle waarnemers het over eens zijn, namelijk de lichtsnelheid in vacuüm en het ruimtetijdinterval tussen twee gebeurtenissen. We noemen deze grootheden invariant.

Getallenvoorbeeld

Voor een waarnemer beweegt een voorwerp met een massa van 4 kg met 60% van de lichtsnelheid in een bepaalde richting.

Voor de impuls van het voorwerp geldt dan:

$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{4 \cdot 0,6 \cdot c}{\sqrt{1 - 0,6^2}} = 3 \cdot c.$$

Voor de energie van het voorwerp geldt dan:

$$E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{4 \cdot c^2}{\sqrt{1 - 0,6^2}} = 5 \cdot c^2.$$

Hieruit volgt voor het linker lid van de eerder genoemde vergelijking:

$$E^2 - p^2 c^2 = 25 \cdot c^4 - 9 \cdot c^4 = 16 \cdot c^4.$$

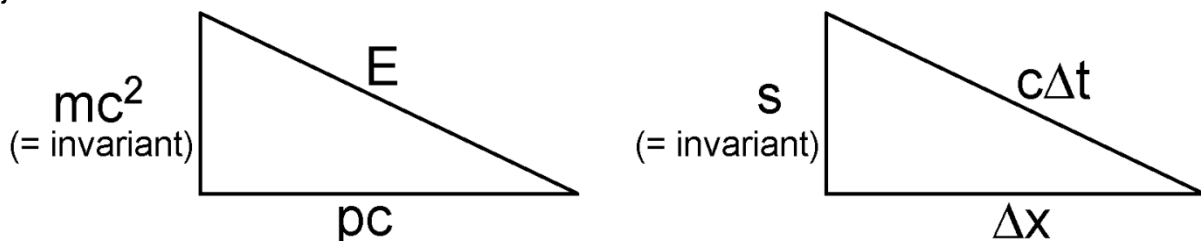
Voor het rechter lid van de vergelijking geldt:

$$m^2 c^4 = 4^2 \cdot c^4 = 16 \cdot c^4.$$

De waarden van het linker en het rechter lid zijn dus inderdaad gelijk aan elkaar.

Interpretatie van de bovenstaande formule

We kunnen de hierboven behandelde formule (binnen het kader) in verband brengen met de onderstaande linker driehoek. Hiervan hebben de rechthoekszijden de lengte pc en mc^2 en de schuine zijde de lengte E . Uit de stelling van Pythagoras volgt $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ en deze komt overeen met de omkaderde formule. We kunnen de totale energie E opgebouwd denken uit twee bestanddelen. Het ene bestanddeel heeft te maken met de impuls p en dus met de beweging van het deeltje. Dit bestanddeel verdwijnt als het deeltje geen snelheid heeft. Het andere bestanddeel is de rustenergie mc^2 en is gerelateerd aan de massa van het deeltje. Merk op dat de drie grootheden langs de zijden van de driehoek dezelfde eenheid hebben, namelijk joule.



De rechter driehoek correspondeert met de formule voor het ruimtetijdinterval s . Bij de linker en rechter driehoek horen formules die sterk met elkaar verbonden zijn. Hier valt het ruimtetijdinterval echter buiten de lesstof.

Impuls en energie van massaloze deeltjes (fotonen)

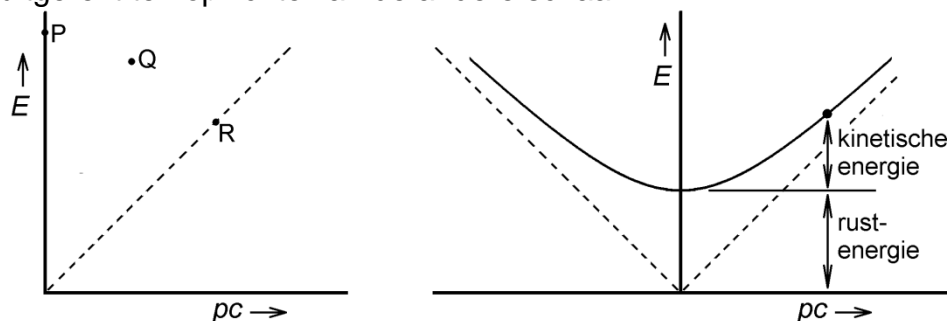
Fotonen zijn lichtdeeltjes die met de lichtsnelheid gaan ($v = c$) en geen massa hebben ($m = 0$). Fotonen hebben naast een energie E ook een impuls p . Het verband tussen deze p en E kan worden gevonden door in de bovenstaande omkaderde formule $m = 0$ te stellen. We krijgen dan:

$$p_f = \frac{E_f}{c}$$

Als zonlicht op je huid valt, voelt dat warm aan. Het is dan ook voor iedereen duidelijk dat fotonen energie hebben. Het feit dat fotonen ook een impuls hebben, is niet zo logisch. Je voelt namelijk niet dat de fotonen van het zonlicht je naar achteren duwen. Toch is dit wel het geval: elk foton, dat op je valt, levert een klein stootje in zijn bewegingsrichting. De impuls van een stroom fotonen levert een soort 'stralingsdruk' op. Zo voorkomt de stralingsdruk van de naar buiten gaande fotonen in de zon dat de zon onder zijn eigen gewicht instort. Ook heeft de stralingsdruk (deels) te maken met het feit dat de staart van kometen van de zon af gericht is.

Minkowskidiagram

De energie en impuls van een deeltje kunnen in een minkowskidiagram worden weergegeven. Zie de onderstaande figuren. Langs de verticale as staat de totale energie E uitgezet en langs de horizontale as het product pc van de impuls en de lichtsnelheid. Van beide grootheden is de eenheid gelijk, namelijk joule. De verticale en horizontale as hebben dezelfde schaalverdeling; de ene schaal is dus niet uitgerekt ten opzichte van de andere schaal.



In het linker diagram hoort punt P bij een massadeeltje dat in rust is en punt Q bij een massadeeltje dat een impuls heeft en dus beweegt. Punt R hoort bij een foton en ligt op de stippellijn die een hoek van 45° maakt met de horizontale en verticale as. Voor alle punten op de stippellijn geldt immers dat E gelijk is aan pc en dat geldt alleen voor massaloze deeltjes (fotonen dus).

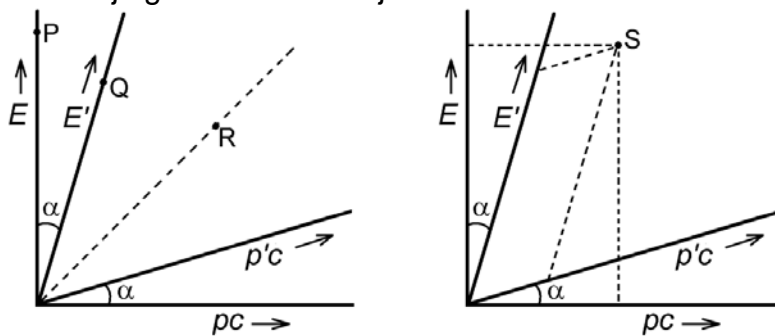
Het rechter diagram geeft het verband tussen de totale energie en de impuls van een deeltje met massa m . De grafiek is een orthogonale hyperbool met de twee stippellijnen als asymptoten. Als het deeltje geen impuls heeft, bestaat de energie van het deeltje uitsluitend uit rustenergie mc^2 . Als het deeltje wel impuls heeft, heeft het deeltje behalve rustenergie ook kinetische energie. Hoe groter de impuls, des te groter ook de kinetische energie.

Opmerking

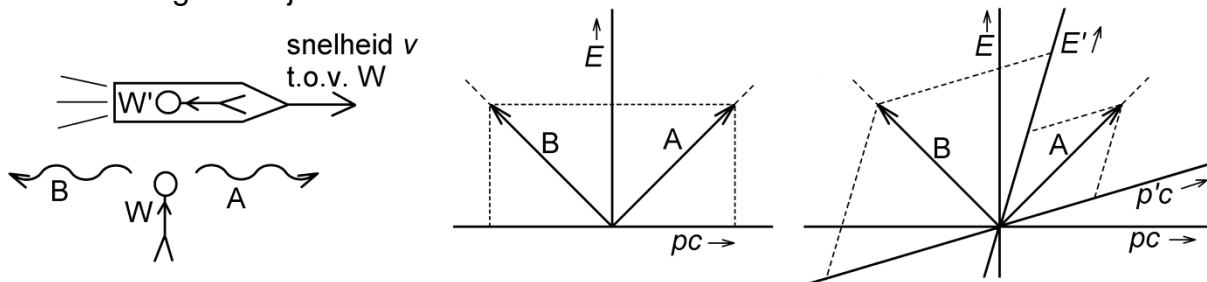
In de relativiteitstheorie worden langs de assen van het minkowskidiagram meestal de grootheden E/c en p gezet in plaats van E en pc .

Transformatie van energie en impuls tussen twee waarnemers (valt BUITEN de lesstof!!!)

Stel dat een deeltje wordt geobserveerd door twee inertiaalwaarnemers W en W' die ten opzichte van elkaar bewegen. Uiteraard zijn de grootheden E (= energie) en pc (= impuls maal lichtsnelheid) van het deeltje dan verschillend voor beide waarnemers. In zulke gevallen kan het minkowskidiagram worden uitgebreid met gekantelde assen die horen bij waarnemer W' terwijl de verticale en horizontale as bij waarnemer W horen. In het onderstaande linker diagram stelt punt P een deeltje voor dat voor waarnemer W in rust is en punt Q een deeltje dat voor waarnemer W' in rust is. Punt R is voor beide waarnemers een foton. In het rechter diagram worden van een deeltje (voorgesteld door punt S) de waarden van E en pc bepaald voor zowel waarnemer W als waarnemer W' (zie stippellijnen). Met de lorentztransformatie kunnen deze waarden omgerekend worden van de ene naar de nadere waarnemer. Zie de bijlage voor het bewijs.



Als voorbeeld nemen we twee fotonen A en B die in tegengestelde richting van elkaar bewegen en voor waarnemer W gelijk aan elkaar zijn (afgezien van de bewegingsrichting uiteraard). Waarnemer W' heeft snelheid v ten opzichte van waarnemer W . Zie de onderstaande linker figuur die de situatie schematisch weergeeft. Voor W' heeft foton B meer energie en impuls dan foton A . In de middelste en rechter figuur stellen de pijlen de twee fotonen A en B in het minkowskidiagram voor. In de middelste figuur zijn de waarden van E en pc voor waarnemer W geconstrueerd (zie stippellijnen) en in de rechter figuur die voor waarnemer W' . In het rechter diagram is duidelijk te zien dat de E' - en $p'c$ -waarden van foton B groter zijn dan die van foton A .



Als v de snelheid van W' ten opzichte van W is, stellen we:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Door gebruikmaking van deze twee factoren, krijgt de lorentztransformatie een eenvoudige gedaante. Bedenk daarbij dat pc gelijk is aan E .

Voor foton A geldt dan:

$$E' = \gamma(E - \beta \cdot pc) = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} E = E \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Op dezelfde manier geldt voor foton B:

$$E' = E \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Omdat van een foton de energie E en de frequentie f evenredig met elkaar zijn, kunnen we de symbolen E en E' vervangen door f en f' . We krijgen dan de bekende formules voor het dopplereffect van EM-golven.

Opgaven bij § 4

Opgave 1

Een voorwerp met massa m beweegt zo snel, dat zijn kinetische energie even groot is als zijn rustenergie.

a.

Leg uit dat in die situatie geldt: $E = 2 \cdot m \cdot c^2$.

b.

Toon aan dat dan voor de impuls van het voorwerp geldt: $p = \sqrt{3} \cdot mc$.

Opgave 2

Jan is een inertiaalwaarnemer (die dus niet versneld of vertraagd) die een deeltje bestudeert dat met een constante snelheid in een bepaalde richting beweegt. Voor Jan heeft het deeltje een totale energie (symbool E) van 3 J. Bovendien bedraagt voor hem het product van de impuls en de lichtsnelheid (symbool pc) 2 J.

a.

Bereken de waarde van de rustenergie van het deeltje.

Piet is ook een inertiaalwaarnemer die met een grote (constante) snelheid ten opzichte van Jan beweegt. Voor Jan bewegen Piet en het deeltje in tegengestelde richtingen van elkaar. Voor Piet heeft het deeltje een totale energie van 4 J.

b.

Bereken welke waarde het product van de impuls en de lichtsnelheid heeft voor Piet.

Opgave 3

Een voorwerp met massa m en snelheid v heeft impuls p . Zolang de snelheid veel kleiner is dan de lichtsnelheid, geldt: $p = m \cdot v$.

a.

Substitueer deze uitdrukking voor p in de formule $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ en toon aan dat je dan krijgt:

$$E^2 = m^2 c^4 \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Omdat $\frac{v^2}{c^2}$ veel kleiner is dan 1, is $\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$ bij benadering gelijk aan $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$.

b.

Toon hiermee aan dat de bij a. gevonden uitdrukking overgaat in:

$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ en dat we daarmee de oude vertrouwde formule voor de kinetische energie terug krijgen.

Opgave 4

Jan staat met schaatsen op spiegelglad ijs. Recht achter hem bevindt zich een zeer sterke lichtbron die fotonen uitzendt. Jan heeft een spiegel op zijn rug gebonden om de van achteren komende fotonen te reflecteren. Elke keer als een foton door de spiegel gereflecteerd wordt, krijgt Jan een stootje naar voren. De impuls die Jan daarbij krijgt, is twee keer zo groot als de impuls van het foton.

a.

Leg dat laatste kort uit. Vergelijk dit bijvoorbeeld met het vangen en het teruggooien van een bal.

De massa van Jan (inclusief spiegel en schaatsen) bedraagt 50 kg. De fotonen die de lichtbron uitzendt, hebben allemaal een energie van $1,6 \cdot 10^{-19}$ J (= 1,0 eV).

b.

Bereken hoeveel fotonen op de spiegel moeten vallen om Jan een snelheid van 1,0 m/s te geven. Verwaarloos alle wrijvingskrachten en het effect van fotonen uit andere richtingen.

Opgave 5

Substitueer de formules $E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en $p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ in $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$.

Laat vervolgens zien dat het linkerlid van de vergelijking gelijk is aan het rechterlid, namelijk $m^2 c^4$.

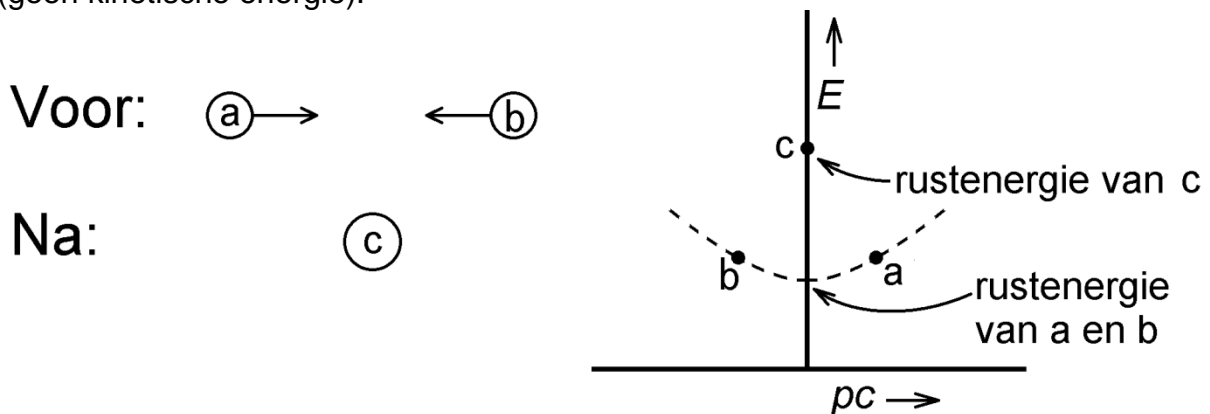
§ 5 Wisselwerking tussen (sub)atomaire deeltjes; grafische weergave

Wet van behoud van impuls en wet van behoud van energie

Als twee of meer deeltjes krachten op elkaar uitoefenen, gelden twee wetten namelijk 1) de wet van behoud van impuls en 2) de wet van behoud van energie. Dat geldt ook relativistisch! Bij de wet van behoud van energie mag de rustenergie niet weggelaten worden! In de volgende voorbeelden zullen we zien dat deeltjes, die energie opnemen, een grotere massa krijgen. De wet van behoud van massa geldt dus zeer beslist niet! Overigens gelden beide behoudswetten binnen elk inertiaalstelsel.

Voorbeeld 1: twee botsende deeltjes die één geheel vormen

Twee even zware deeltjes a en b botsen frontaal op elkaar en vormen daarbij één geheel namelijk deeltje c. Zie de onderstaande figuren. Vóór de botsing bewegen a en b met gelijke snelheid naar elkaar toe. De totale impuls is daarom nul en dus is het nieuw gevormde deeltje c in rust. Dit nieuwe deeltje heeft alleen rustenergie (geen kinetische energie).



In het minkowskidiagram zijn van de deeltjes de totale energie E (inclusief rustenergie!) en de impuls keer de lichtsnelheid pc tegen elkaar uitgezet. Elk deeltje wordt in het diagram als een stip weergegeven. De totale impuls vóór de botsing is nul. In het diagram volgt dit uit het feit dat stip a even ver rechts van de verticale as ligt als stip b links van deze as ligt. De impuls na de botsing is ook nul. Dit zie je eenvoudig in het diagram want stip c ligt op de verticale as. De totale energie blijft bij de botsing ook gelijk. Dit klopt met het feit dat de hoogte van stip c gelijk is aan de hoogte van stip a plus de hoogte van stip b.

De stippellijn in het minkowskidiagram geeft het verband weer tussen E en pc behorende bij de massa van de oorspronkelijke deeltjes a en b. Deze zogenoemde orthogonale hyperbool is in de vorige paragraaf besproken. Van elk deeltje (a en b) ligt de rustenergie lager dan de totale energie. Het verschil hiertussen is de bewegingsenergie van het deeltje. Omdat de rustenergie een maat is voor de massa, blijkt hieruit dat de oorspronkelijke totale massa (van de deeltjes a en b samen) kleiner is dan de uiteindelijke massa (van deeltje c).

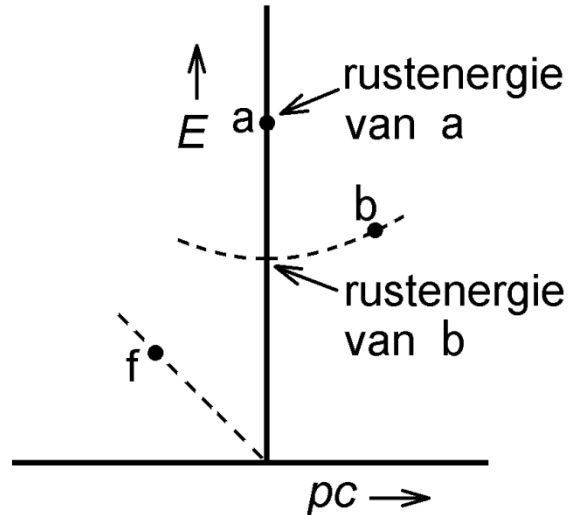
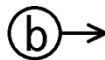
Voorbeeld 2: een atoom zendt een foton uit

Een in rust verkerend atoom a zendt een foton f uit dat naar links beweegt. Omdat het foton een impuls heeft, beweegt het nieuwe atoom b naar rechts waarbij de totale impuls nul blijft. Zie de onderstaande figuren.

Voor:



Na:



In het minkowskidiagram zijn atoom a, foton f en atoom b als stippen weergegeven. Stip a ligt op de verticale as wat betekent dat zijn impuls nul is. Stip b ligt even ver rechts van de verticale as als dat stip f links van de verticale as ligt. Na het uitzenden van het foton is de totale impuls dus nog steeds nul. Ook blijft de totale energie bij het uitzenden van het foton gelijk. Dit klopt met het feit dat de hoogte van stip a gelijk is aan de hoogte van stip f plus de hoogte van stip b.

De rustenergie van atoom b is lager dan die van atoom a. Een deel van de rustenergie van atoom a verandert namelijk in fotonenergie en een ander deel in kinetische energie van atoom b. De massa van atoom b is dan dus ook lager dan die van atoom a.

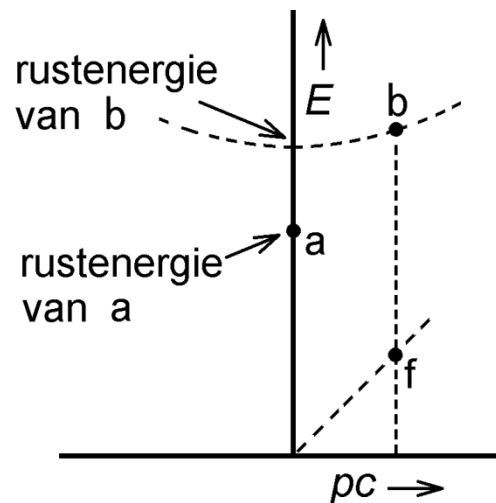
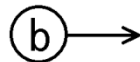
Voorbeeld 3: een atoom absorbeert een foton

Nu bekijken we het geval waarbij een stilstaand atoom a een van links komend foton f absorbeert. Omdat het foton een impuls heeft, beweegt het atoom b na de absorptie naar rechts. Zie de onderstaande figuren.

Voor:



Na:



In het Minkowski-diagram zijn de optredende deeltjes weergegeven. Ga na dat in de diagrammen de (totale) impuls en de (totale) energie behouden blijven bij de absorptie van het foton. Omdat de rustenergie van atoom b groter is dan die van atoom a, is de massa van atoom b ook groter.

Opgaven bij § 5

Opgave 1

Geef aan of de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

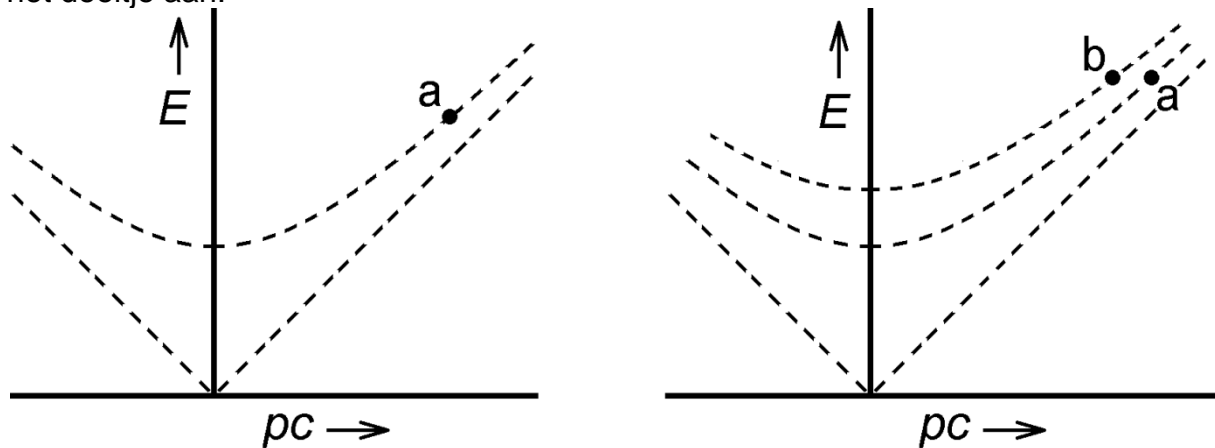
- 1) Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van impuls.
- 2) Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van energie.
- 3) Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van massa.
- 4) Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes hoeft bij gebruik van de wet van behoud van energie de rustenergie niet in rekening gebracht te worden.
- 5) Als een stilstaand (sub)atomair deeltje explodeert, is er vóór de explosie geen kinetische energie en na de explosie wel kinetische energie.
- 6) Als een stilstaand (sub)atomair deeltje explodeert, blijft de totale massa gelijk of neemt deze toe.

Opgave 2

In het onderstaande linker minkowskidiagram hoort de stip bij deeltje a. De gestippelde kromme lijn stelt de eerder besproken orthogonale hyperbool voor.

a.

Geef in dit diagram langs de verticale as de rustenergie en de kinetische energie van het deeltje aan.



In het rechter minkowskidiagram horen de twee stippen bij deeltjes a en b. Beide stippen liggen even hoog in het diagram (ze hebben dus dezelfde totale energie).

b.

Heeft deeltje b meer of minder kinetische energie dan deeltje a?

Heeft deeltje b meer of minder rustenergie dan deeltje a?

Heeft deeltje b meer of minder massa dan deeltje a?

c.

Teken in het rechter minkowskidiagram een stip die hoort bij deeltje c dat dezelfde massa heeft als deeltje a maar met de helft van de kinetische energie.

Opgave 3

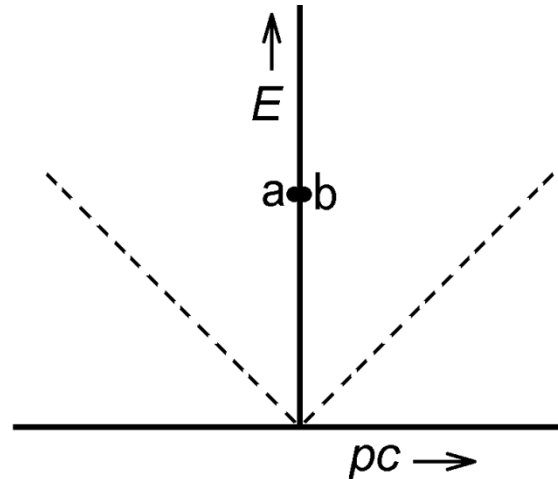
Bij radioactief verval van bepaalde isotopen ontstaat een zogenoemd 'positron'. Hiervan is de massa gelijk aan die van een elektron en de lading tegengesteld aan die van een elektron. Als een positron en een elektron bij elkaar komen, treedt er 'annihilatie' op. Zie de onderstaande figuren waarin a en b in rust zijn. Hierbij verdwijnen het positron a en het elektron b en daarvoor in de plaats komen twee gammafotonen f_1 en f_2 die dezelfde energie hebben.

Teken in het minkowskidiagram de stippen die horen bij de fotonen f_1 and f_2 .

Voor:



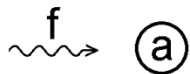
Na:



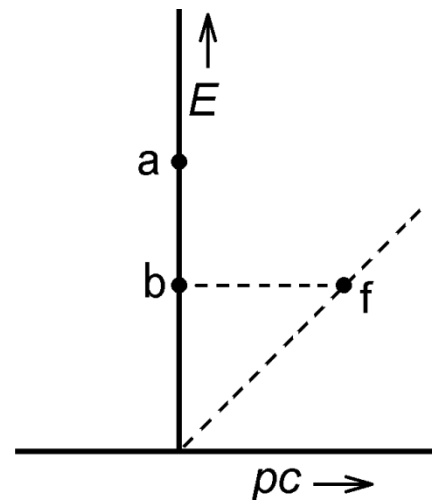
Opgave 4

In de onderstaande figuren absorbeert een in rust verkerend deeltje a een van links komend foton f. Tijdens de absorptie vormen zich twee deeltjes b en c. Deeltje b is nog steeds in rust en heeft een rustenergie die gelijk is aan de fotonenergie. Het andere deeltje c beweegt naar rechts.

Voor:



Na:



a.


Teken in het minkowskidiagram de stip die bij deeltje c hoort. Geef duidelijk aan hoe je aan je antwoord komt.

b.

Hoe kun je in het diagram zien dat deeltje c een kleinere massa heeft dan deeltje a?


Opgave 5

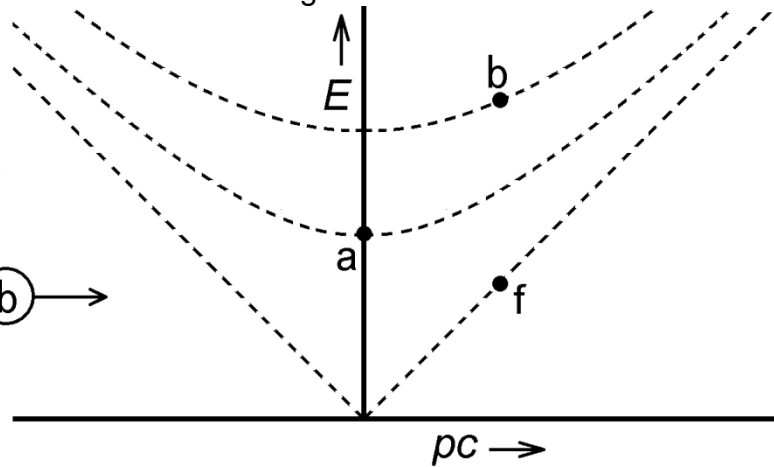
Een vrij atoom in de grondtoestand kan een foton absorberen en komt dan in één van zijn 'aangeslagen' toestanden. Het atoom krijgt daarmee iets meer rustenergie en dus ook iets meer massa. Zie de onderstaande figuren.

Voor: 

(a)

Na:

(b) 




Een vrij elektron kan geen foton absorberen omdat het een elementair deeltje is zonder mogelijke aangeslagen toestanden. Anders gezegd: het elektron heeft slechts één waarde voor de rustenergie en dus ook één waarde voor de massa.

Leg nu kort uit waarom de bovenste gestippelde hyperbool in het diagram bij een elektron niet bestaat.

Opgave 6

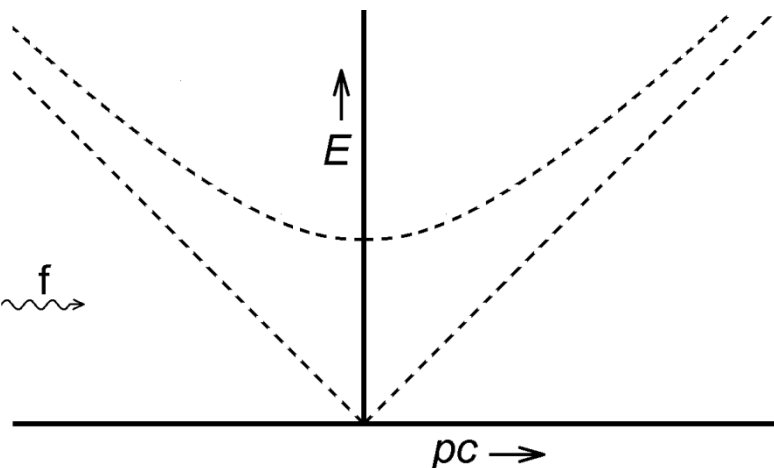
In de onderstaande linker figuur botst een snel positron a op een stilstaand elektron b. Het positron heeft dezelfde massa als een elektron maar een tegengestelde lading. In het minkowskidiagram (rechts) hoort de gestippelde hyperbool bij de elektronmassa.

Voor: (a)  (b)

(b)

Na(?):





a.

Geef met twee stippen in het diagram het positron (a) en het elektron (b) weer.

b.

Leg uit of de twee deeltjes kunnen verdwijnen en er hierbij een foton ontstaat (annihilatie dus)?

§ 6 Wisselwerking tussen (sub)atomaire deeltjes; berekeningen

Voorbeeld 1: twee botsende deeltjes die één geheel vormen

Twee even zware deeltjes, ieder met massa m , botsen frontaal op elkaar en vormen daarbij één geheel. Het nieuw gevormde deeltje heeft massa M . We bekijken de botsing in het referentiestelsel van het massamiddelpunt (zwaartepunt) van het geheel. Zie de onderstaande figuren. Het linker deeltje beweegt met snelheid v naar rechts en het rechter deeltje beweegt met snelheid v naar links. Na de botsing is het geheel in rust. Omdat het nieuw gevormde deeltje in rust is, heeft het géén impuls en alleen rustenergie (geen kinetische energie).



Volgens de wet van behoud van impuls geldt:

$$p(\text{linker deeltje}) + p(\text{rechter deeltje}) = 0$$

Als we de formule voor de impuls invullen, krijgen we:

$$\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m \cdot -v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0.$$

Zoals verwacht wordt aan de wet van behoud van impuls voldaan voor elke waarde van m . Deze vergelijking brengt ons dus niet verder.

Volgens de wet van behoud van energie geldt:

$$E(\text{linker deeltje}) + E(\text{rechter deeltje}) = E(\text{nieuwe deeltje}).$$

Als we de formule voor de energie invullen, krijgen we:

$$\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M \cdot c^2.$$

Uit de laatste vergelijking volgt dat: $M = \frac{2 \cdot m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$

We zien dat de massa M na de botsing groter is dan de oorspronkelijke massa $2 \cdot m$ van de materie. Dit komt omdat bewegingsenergie is omgezet in rustenergie.

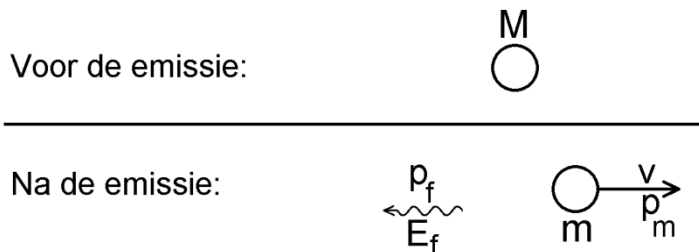
Voorbeeld 2: een atoom zendt een foton uit

Een in rust verkerend atoom met massa M zendt een foton uit met impuls p_f en energie E_f . Zie de onderstaande figuren. Na de emissie van het foton heeft het atoom massa m en snelheid v . We nemen in dit voorbeeld aan dat snelheid v zeer klein is ten opzichte van de lichtsnelheid c . Voor de impuls p_m van het atoom geldt dan de niet-relativistische formule:

$$p_m = m \cdot v.$$

Verder nemen we aan dat de kinetische energie van het atoom (na de emissie) verwaarloosd kan worden ten opzichte van zijn rustenergie. Voor de energie E_m van dit atoom geldt dan:

$$E_m = mc^2.$$



Volgens de wet van behoud van impuls geldt:

$$0 = p_f + p_m.$$

Als we alleen naar de grootte (en niet naar de richting) van de impulsen kijken, kunnen we schrijven:

$$p_f = p_m.$$

Voor de snelheid v van het atoom geldt dan dus:

$$v = \frac{p_f}{m}.$$

We kunnen v als volgt in de energie van het foton uitdrukken.

$$v = \frac{E_f}{mc}$$

Uit de wet van behoud van energie volgt:

$$E_M = E_f + E_m.$$

Hieruit volgt:

$$M \cdot c^2 = E_f + m \cdot c^2.$$

Voor de massa van het atoom na het uitzenden van het foton geldt dan:

$$m = M - \frac{E_f}{c^2}.$$

Zoals verwacht is de massa m van het atoom na het uitzenden van het foton kleiner is dan de massa M van het oorspronkelijke atoom.

We moeten ons realiseren dat de twee gevonden vergelijkingen (dus de uitdrukkingen voor v en voor m) alleen geldig zijn onder de eerder genoemde aannames. Als we deze aannames niet willen doen, zijn we genoodzaakt om de behoudswetten van impuls en energie met elkaar te combineren. In het volgende voorbeeld 3 wordt dat gedaan.

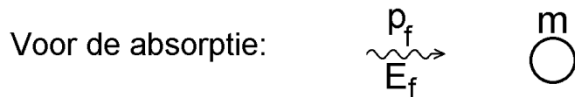
Voorbeeld 3: een atoom absorbeert een foton

Nu bekijken we het geval waarbij een stilstaand atoom een van links komend foton absorbeert. Omdat het foton een impuls heeft, beweegt het atoom na de absorptie naar rechts. Zie de onderstaande linker figuur.

Het foton heeft impuls p_f en energie E_f .

Vóór de absorptie heeft het atoom massa m , géén impuls en energie E_m .

Na de absorptie heeft het atoom massa M , impuls p_M en energie E_M .



We willen de atoommassa M na de absorptie van het foton bepalen. In tegenstelling tot het vorige voorbeeld maken we nu geen aannames over de snelheid van het atoom en lossen het geval exact op.

Volgens de wet van behoud van impuls geldt:

$$p_f = p_M.$$

Om deze vergelijking gemakkelijk te kunnen combineren met de wet van behoud van energie, gaan we over van impulsgrootheden naar energiegrootheden. De eerste stap is om beide termen met c te vermenigvuldigen en vervolgens te kwadrateren.

We krijgen dan:

$$p_f^2 c^2 = p_M^2 c^2.$$

Met behulp van de formule $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ krijgen we:

$$E_f^2 = E_M^2 - M^2 c^4.$$

Deze vergelijking schrijven we als:

$$E_f^2 + M^2 c^4 = E_M^2.$$

Volgens de wet van behoud van energie geldt:

$$E_f + E_m = E_M.$$

Als we het linker- en rechterlid kwadrateren, krijgen we:

$$E_f^2 + E_m^2 + 2E_f E_m = E_M^2.$$

We kunnen nu beide behoudswetten eenvoudig combineren omdat het rechter lid in beide vergelijkingen gelijk is. We vinden dan:

$$E_f^2 + M^2 c^4 = E_f^2 + E_m^2 + 2E_f E_m.$$

Deze kan vereenvoudigd worden tot:

$$M^2 c^4 = E_m^2 + 2E_f E_m.$$

Omdat het atoom voor de absorptie van het foton stilstaat, geldt: $E_m = mc^2$.

Hiermee wordt de vergelijking:

$$M^2 c^4 = m^2 c^4 + 2E_f mc^2.$$

Alle termen delen door c^4 geeft:

$$M^2 = m^2 + \frac{2E_f m}{c^2}.$$

Hieruit volgt uiteindelijk:

$$M = m \cdot \sqrt{1 + \frac{2E_f}{mc^2}}.$$

Uit het feit dat de wortel in de bovenstaande formule altijd groter dan 1 is, blijkt dat de massa van het atoom is toegenomen. Dit is begrijpelijk, want de energie van het foton is voor een deel in rustenergie omgezet (en voor het andere deel in kinetische energie van het atoom).

Opmerking

Vanuit de wiskunde weten we dat als x veel kleiner dan 1 is, de wortel $\sqrt{1+2x}$ bij benadering gelijk is aan $1+x$. Dit kunnen we in de laatste vergelijking toepassen. Als $2E_f$ heel klein is ten opzichte van mc^2 , krijgen we:

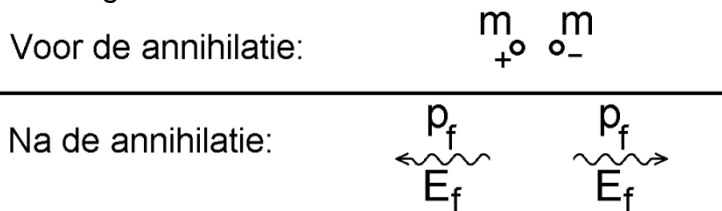
$$M = m \cdot + \frac{E_f}{c^2}.$$

Deze vergelijking volgt direct uit de wet van behoud van energie als we aannemen dat het atoom na de fotonabsorptie een verwaarloosbare kinetische energie heeft. Ga dat na.

Opgaven bij § 6

Opgave 1

Bij radioactief verval van bepaalde isotopen ontstaat een zogenoemd 'positron'. Hiervan is de massa m gelijk aan die van een elektron en de lading tegengesteld aan die van een elektron. Als een positron en een elektron bij elkaar komen, treedt er 'annihilatie' op. Zie de onderstaande figuur. Hierbij verdwijnen het positron en het elektron en daarvoor in de plaats komen twee gammafotonen, allebei met impuls p_f en energie E_f .



a.

Leg uit dat na de annihilatie de twee fotonen in tegengestelde richting bewegen. Ga er daarbij vanuit dat het positron en het elektron vóór de annihilatie een verwaarloosbare snelheid hebben.

b.

Leid een formule af waarin de energie E_f van elk foton uit de massa m van het positron (en van het elektron) berekend kan worden.

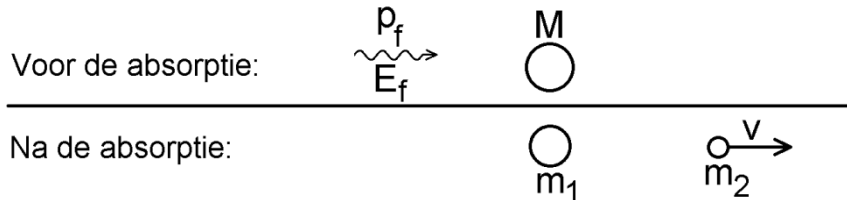
De massa van een elektron is $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.

c.

Breken de energie van elk foton.

Opgave 2

In de onderstaande figuur absorbeert een in rust verkerend deeltje met massa M een foton met impuls p_f en energie E_f . Tijdens de absorptie vormen zich twee deeltjes. Het ene deeltje heeft massa m_1 en is nog steeds in rust. Het andere deeltje heeft massa m_2 en snelheid v .



a.

Pas de wet van behoud van impuls toe op deze situatie. Stel hierbij een vergelijking op met de in de figuur aangegeven grootheden.

b.

Pas de wet van behoud van energie toe op deze situatie. Stel hierbij weer een vergelijking op met de in de figuur aangegeven grootheden.

In de rest van deze opgave nemen we aan dat de snelheid van het bewegende deeltje 60% van de lichtsnelheid is (dus: $v = 0,6 \cdot c$).

c.

Toon aan dat dan uit de wet van behoud van impuls volgt dat voor het foton geldt:

$$E_f = 0,75 \cdot m_2 \cdot c^2.$$

d.

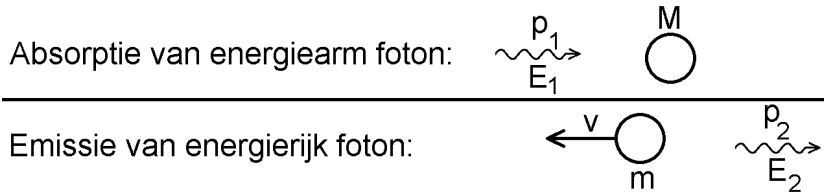
Toon aan dat de (totale) energie van het bewegende deeltje gelijk is aan $1,25 \cdot m_2 \cdot c^2$

e.

Toon aan dat uit de wet van behoud van energie volgt dat $M = m_1 + 0,5 \cdot m_2$.

Opgave 3

In de onderstaande figuur absorbeert een in rust verkerend atoom met massa M een van links komend foton dat impuls p_1 en energie E_1 heeft. Zeer korte tijd later zendt het atoom een naar rechts bewegend foton uit dat impuls p_2 en energie E_2 heeft. Het geëmitteerde foton heeft meer energie dan het geabsorbeerde foton (dus is E_2 groter dan E_1). Na de absorptie en emissie van beide fotonen heeft het atoom massa m en beweegt naar links met snelheid v . Het minteken komt voort uit het feit dat in deze opgave naar rechts positief genomen wordt. De waarde van v zelf is dus positief. Deze v is veel kleiner dan de lichtsnelheid c .



a.

Leg kort uit waarom het atoom na de emissie naar links beweegt.

b.

Pas de wet van behoud van impuls toe op het bovenstaande proces.

Bewijs vervolgens dat $v = \frac{E_2 - E_1}{m \cdot c}$.

c.

Pas de wet van behoud van energie toe op het bovenstaande proces. Verwaarloos daarbij de kinetische energie van het atoom in de eindsituatie.

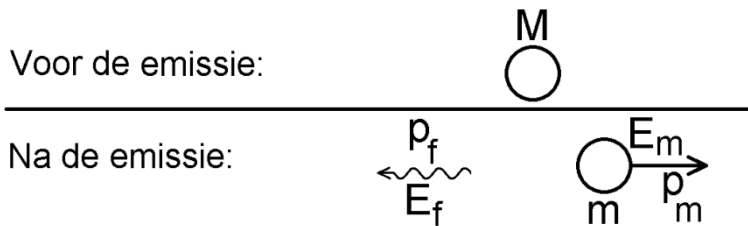
Bewijs vervolgens dat $\Delta m = m \cdot \frac{v}{c}$ waarin Δm de massa-afname van het atoom is.

Opgave 4

Een in rust verkerend atoom met massa M en rustenergie E_M zendt een foton uit met energie E_f en impuls p_f . Zie de onderstaande figuur. Na de emissie van het foton heeft het atoom massa m , impuls p_m en (totale) energie E_m . Voor de massa m geldt:

$$m = M \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot E_f}{M \cdot c^2}}.$$

Aan de hand van de volgende vragen gaan we deze formule bewijzen. De werkwijze in deze opgave lijkt op die in voorbeeld 3 van de leestekst.



Volgens de formule is m kleiner dan M . De massa van het atoom is blijkbaar kleiner geworden door het uitzenden van een foton.

a.

Leg kort uit hoe je dat kunt begrijpen.

Uit de wet van behoud van impuls volgt: $E_f^2 + m^2 c^4 = E_m^2$.

b.

Toon dat aan.

Uit de wet van behoud van energie volgt: $E_M^2 + E_f^2 - 2E_M E_f = E_m^2$.

c.

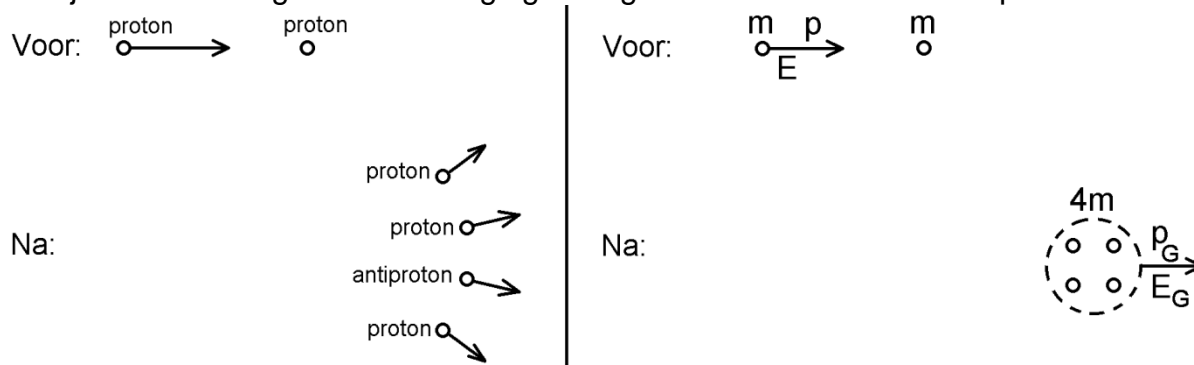
Toon dat aan.

d.

Laat zien dat uit de te bewijzen vergelijkingen bij b. en c. de bovenstaande formule voor m volgt.

Opgave 5

In de onderstaande linker figuur botst een proton met hoge snelheid op een stilstaand proton. Bij de botsing ontstaan er twee extra deeltjes namelijk een proton en een antiproton. Een antiproton heeft precies dezelfde massa als een proton maar een tegengestelde lading. Na de botsing zijn er dus in totaal vier deeltjes: drie protonen en een antiproton. De benodigde rustenergie van de twee nieuw gevormde deeltjes is afkomstig van de bewegingsenergie van het aanstormende proton.



In de linker figuur bewegen de vier deeltjes na de botsing uit elkaar; in de rechter figuur bewegen de vier deeltjes min of meer als groep verder. In de rechter figuur heeft het aanstormende proton de minimale energie E om de reactie plaats te laten vinden. In deze opgave zijn we op zoek naar een uitdrukking voor deze minimale energie E van het aanstormende proton. De massa van een proton (en van een antiproton) is met m aangegeven. Verder zijn in de rechter figuur p en E de impuls en (totale) energie van het aanstormende deeltje. De groep van vier deeltjes, die na de botsing verder gaan, heeft massa $4m$, impuls p_G en (totale) energie E_G .

Alle volgende vragen hebben betrekking op de rechter figuur. Gebruik naast de lichtsnelheid c uitsluitend de symbolen in deze figuur.

a.

Toon aan dat uit de wet van behoud van impuls volgt:

$$E_G^2 = E^2 + 15 \cdot m^2 c^4.$$

b.

Toon aan dat uit de wet van behoud van energie volgt:

$$E_G^2 = E^2 + m^2 c^4 + 2Emc^2.$$

c.

Combineer de te bewijzen formules bij a. en b. en toon aan dat geldt:

$$E = 7mc^2.$$

d.

Hoeveel keer is de kinetische energie groter dan de rustenergie van het aanstormende deeltje in de rechter figuur? Er is geen berekening nodig.

§ 7 Massadefect bij kernreacties

Elektronvolt

In de kernfysica wordt vaak gebruik gemaakt van de elektronvolt (afgekort eV) en de mega-elektronvolt (afgekort MeV) als eenheid van energie. Deze laatste is gelijk aan miljoen elektronvolt. Een elektronvolt is als volgt gedefinieerd.

Eén elektronvolt is de energieverandering van een elektron als deze een spanning van 1 volt doorloopt.

Er geldt: $1 \text{ elektronvolt} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ joule}$ (afgekort $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).
Het getal $1,602 \cdot 10^{-19}$ is afkomstig van het feit dat het elementair ladingsquantum gelijk is aan $1,602 \cdot 10^{-19}$ coulomb.

Atomaire massa-eenheid

In de kernfysica wordt ook vaak gebruik gemaakt van de 'atomaire massa-eenheid'. Deze is als volgt gedefinieerd.

De atomaire massa-eenheid is gelijk aan een twaalfde van de massa van een koolstof-12 atoom.

De atomaire massa-eenheid wordt meestal aangeduid met u. De massa van een koolstof-12 atoom is per definitie gelijk aan 12 u. Ruwweg is één u gelijk aan de massa van een proton of een neutron. Er geldt: $1 \text{ u} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Rustenergie behorend bij 1 atomaire massa-eenheid

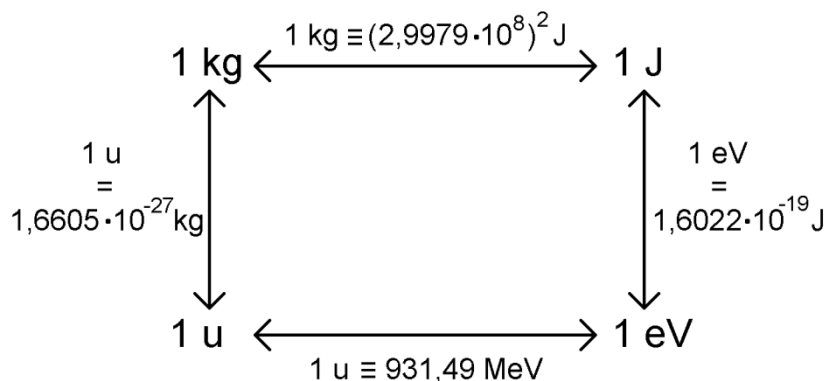
In de voorgaande paragraaf hebben we gezien dat een stilstaand deeltje met massa m een rustenergie E_0 heeft waarvoor geldt:

$$E_0 = m \cdot c^2.$$

Volgens deze formule heeft een voorwerp met een massa van 1 kg een rustenergie van $9 \cdot 10^{16}$ joule (want $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; alles afgerond). We zoeken nu een soortgelijke regel voor de eenheden u (atomaire massa-eenheid) en MeV (mega elektronvolt).

Hierbij maken we gebruik van het schema hiernaast.

Eén atomaire massa-eenheid is gelijk aan $1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Eén kilogram komt overeen met $(2,9979 \cdot 10^8)^2$ joule. Tenslotte is 1 joule gelijk aan $1/(1,6022 \cdot 10^{-19})$ elektronvolt. Met deze omrekenfactoren maken we de volgende berekening.

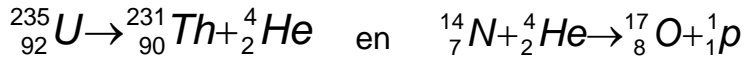


$$1\text{u} \equiv (1,6605 \cdot 10^{-27}) \cdot (2,9979 \cdot 10^8)^2 \cdot \left(\frac{1}{1,6022 \cdot 10^{-19}} \right) \text{eV} = 931,49 \text{ MeV}$$

Een massa van 1 u heeft dus een rustenergie van 931,49 MeV. In de rest van deze paragraaf zullen we dit veelvuldig gebruiken.

Massadefect

Hieronder staan twee voorbeelden van kernreacties.



De eerste reactie geeft het alfaverval van een uranium-235 kern weer. Een alfadeeltje (dus een helium-4 kern) wordt met grote snelheid weggeschoten waarbij een thorium-231 kern achterblijft. Bij de tweede reactie wordt een stikstof-14 kern beschoten met een alfadeeltje. Daarbij ontstaan een zuurstof-17 kern en een proton.

Bij de eerste reactie vindt er een afname van de massa plaats want de massa van de uraniumkern is groter dan de gezamenlijke massa van de thoriumkern en het alfadeeltje. Bij de tweede reactie vindt er een toename van de massa plaats. De gezamenlijke massa van de stikstofkern en het alfadeeltje is namelijk kleiner dan de gezamenlijke massa van de zuurstofkern en proton. Het massaverschil tussen voor en na de reactie wordt in beide gevallen het massadefect genoemd.

Als de totale massa bij een kernreactie afneemt (zoals bij de eerste reactie), zal de totale rustenergie natuurlijk ook afnemen. Volgens de wet van behoud van energie wordt een deel van de oorspronkelijke rustenergie dan omgezet in een andere energievorm. In ons voorbeeld is dat kinetische energie van het alfadeeltje en van thoriumkern. Als de totale massa bij een kernreactie toeneemt (zoals bij de tweede reactie), zal de totale rustenergie ook toenemen. Volgens de wet van behoud van energie is een andere energievorm in deze extra rustenergie omgezet. In ons voorbeeld is dat kinetische energie van het aanstormende alfadeeltje.

Uitwerking van de eerste kernreactie

We bekijken de eerstgenoemde kernreactie: ${}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{231}\text{Th} + {}_2^4\text{He}$

De massa van de uraniumkern bedraagt 234,99345 u.

De massa van de thoriumkern bedraagt 230,98693 u.

De massa van de heliumkern (= alfadeeltje) bedraagt 4,00151 u.

Voor het massadefect Δm geldt:

$$\Delta m = 234,99345 \text{ u} - (230,98693 \text{ u} + 4,00151 \text{ u}) = 0,00501 \text{ u}.$$

We zien dat het massadefect heel klein is vergeleken met de diverse kernmassa's. Dat verklaart waarom we zoveel decimalen van de kernmassa's moeten betrekken in onze berekening.

Voor de vrijkomende energie ΔE geldt:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,00501 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 4,67 \text{ MeV}.$$

Verreweg het grootste deel van deze energie is kinetische energie van het alfadeeltje.

Uitwerking van de tweede kernreactie

We bekijken nu de tweede kernreactie: ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{p}$

De massa van de stikstofkern bedraagt 13,99923 u.

De massa van de heliumkern (= alfadeeltje) bedraagt 4,00151 u.

De massa van de zuurstofkern bedraagt 16,99474 u.

De massa van het proton bedraagt 1,00728 u.

Voor het massadefect Δm geldt:

$$\Delta m = (16,99474 \text{ u} + 1,00728 \text{ u}) - (13,99923 \text{ u} + 4,00151 \text{ u}) = 0,00128 \text{ u}.$$

De benodigde energie ΔE geldt:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,00128 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 1,19 \text{ MeV}.$$

In de praktijk zal de kinetische energie van het alfadeeltje groter dan 1,19 MeV moeten zijn want na de reactie hebben het proton en de zuurstofkern ook kinetische energie.

Een systeem (stelsel) van deeltjes

Hieronder volgen drie regels die betrekking hebben op een geïsoleerd systeem (stelsel) van een aantal deeltjes. Denk hierbij aan alle voorbeelden in deze en de voorgaande paragrafen waarbij deeltjes (inclusief fotonen) een wisselwerking met elkaar hadden en niet met de buitenwereld.

1)

De totale impuls van het systeem is gelijk aan de vectoriële optelsom van de impulsen van de bestanddelen. Bij een veranderingsproces (reactie) blijft de totale impuls gelijk.

2)

De totale energie van het systeem is gelijk aan de optelsom van de energieën van de bestanddelen. Bij een veranderingsproces (reactie) blijft de totale energie gelijk.

3)

De massa van het systeem is in het algemeen NIET gelijk aan de optelsom van de massa's van de bestanddelen (althans relativistisch gezien).

In de vorige paragrafen maakten we gebruik van de eerste twee regels. Bij regel 3 kan de massa van het systeem zowel groter als kleiner zijn dan de optelsom van de massa's van de bestanddelen. Bijvoorbeeld is de massa van een hoeveelheid (ideaal) gas groter dan de som van de massa's van de afzonderlijke moleculen. Hiervoor is de kinetische energie van de moleculen verantwoordelijk. Omgekeerd is de massa van een atoom kleiner dan de massa van de kern plus de massa van de elektronen. Hieraan ligt de elektrische aantrekkingskracht tussen de kern en de elektronen ten grondslag. Ook is de massa van de kern kleiner dan de som van de massa's van de protonen en neutronen in de kern.

Massa van een systeem van deeltjes (valt buiten de lesstof)

Als p_{SYS} de totale impuls en E_{SYS} de totale energie van een geïsoleerd systeem van deeltjes is, geldt voor de totale massa M_{SYS} van het systeem:

$$E_{\text{SYS}}^2 - (p_{\text{SYS}}c)^2 = (M_{\text{SYS}}c^2)^2.$$

Deze formule kenden we al voor een afzonderlijk deeltje maar hij geldt ook voor een (geïsoleerd) systeem van deeltjes. Omdat de waarden van E_{SYS} en p_{SYS} behouden blijven bij een veranderingsproces binnen het systeem, zal de waarde van M_{SYS} ook gelijk blijven. De voorwaarde hierbij is wel dat het gehele systeem (inclusief fotonen) moet worden meegenomen in de beschouwing. Een mooi voorbeeld in dit verband is de annihilatie van een elektron en een positron. Deze twee deeltjes verdwijnen en komen er twee gammafotonen, die in tegengestelde richting bewegen, voor in de plaats. Terwijl de afzonderlijke fotonen massaloos zijn, heeft het systeem van deze twee fotonen volgens de laatste formule wel massa! Bedenk daarbij dat de totale impuls van het systeem nul is.

Verder moet worden opgemerkt dat de waarden van E_{SYS} en p_{SYS} verschillen van (inertiaal)waarnemer tot waarnemer die ten opzichte van elkaar bewegen. Hoe kleiner p_{SYS} is, des te kleiner ook E_{SYS} is. Voor de waarnemer waarbij p_{SYS} nul is, is E_{SYS} minimaal. Echter, de waarde van M_{SYS} is invariant, dat wil zeggen voor iedere waarnemer gelijk. Iets soortgelijks hadden we ook al gezien bij een afzonderlijk deeltje.

Opmerking

Bij het bepalen van het massadefect kijken we niet naar de massa van het systeem van de deeltjes (die is immers constant) maar naar de som van de massa's van de afzonderlijke deeltjes.

Opgaven bij § 7

Opgave 1

Wat verstaan we onder 1 elektronvolt?

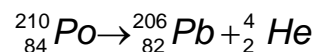
Wat verstaan we onder 1 atomaire massa-eenheid?

Opgave 2

De massa van een atoomkern volgt niet zonder meer uit de massa van een atoom door hier de massa van de bijbehorende elektronen vanaf te trekken. Leg dit uit.

Opgave 3

De onderstaande reactie geeft het alfaverval van polonium-210 weer.



Hierbij geldt: $m(\text{Po-210-kern}) = 209,93678 \text{ u}$ en $m(\text{Pb-206-kern}) = 205,92946 \text{ u}$ en $m(\text{He-4-kern}) = 4,001506 \text{ u}$.

a.

Bepaal het massadefect van deze reactie.

b.

Leg kort uit dat er energie vrijkomt bij deze reactie.

c.

Bereken hoeveel energie (in MeV) er vrijkomt.

Het alfadeeltje krijgt bij het verval een kinetische energie van 5,3 MeV.

d.

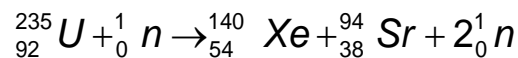
Leg uit waarom er een verschil zit tussen de bij c. gevonden waarde en de genoemde 5,3 MeV.

Opgave 4

Net als een dozijn (12) en een gros (144) is een 'mol' een aanduiding voor een aantal. Een mol is het aantal koolstof-12 atomen dat een gezamenlijke massa van 12 gram heeft. Dit aantal is $6,022 \cdot 10^{23}$. Leg uit wat het verband is tussen een mol en de atomaire massa-eenheid.

Opgave 5

In de volgende kernreactie absorbeert een uranium-235 kern een neutron. Vervolgens valt de kern uiteen in een xenon-140 kern en een strontium-94 kern. Bovendien worden twee neutronen weggeschoten.



Hierbij geldt: $m(\text{neutron}) = 1,0086649 \text{ u}$ en $m(\text{U-235-kern}) = 234,9935 \text{ u}$ en $m(\text{Xe-140-kern}) = 139,8918 \text{ u}$ en $m(\text{Sr-94-kern}) = 93,8944 \text{ u}$.

a.

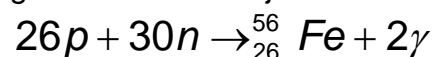
Bepaal het massadefect.

b.

Bereken de energie (in MeV) die vrijkomt.

Opgave 6

In de volgende denkbeeldige kernreactie komen 26 losse protonen en 30 losse neutronen samen en vormen een ijzer-56 kern. Er komen hierbij twee gelijke gammafotonen vrij.



Hierbij geldt: $m(\text{proton}) = 1,0072765 \text{ u}$ en $m(\text{neutron}) = 1,0086649 \text{ u}$ en $m(\text{Fe-56-kern}) = 55,920677 \text{ u}$

a.

Bepaal het massadefect.

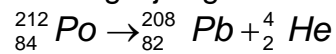
b.

Bereken de energie van elk afzonderlijk gammafoton. Neem daarbij aan dat de losse protonen, neutronen en ijzerkern een verwaarloosbare kinetische energie hebben.

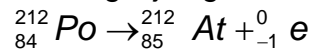
Opgave 7

Polonium-212 is een alfastraler en bijvoorbeeld geen bètastraler. We kunnen dit nagaan door naar de massaverandering bij beide vervalvergelijkingen te kijken.

De vergelijking van het alfaverval is:



De vergelijking van het bètaverval (preciezer: bèta min verval) is:



De massa's van de deeltjes zijn hieronder gegeven.

$m(\text{Po-212-kern}) = 211,94279 \text{ u}$ en $m(\text{Pb-208-kern}) = 207,93165 \text{ u}$ en

$m(\text{He-4-kern}) = 4,001506 \text{ u}$ en $m(\text{At-212-kern}) = 211,94412 \text{ u}$ en

$m(\text{elektron}) = 0,00054858 \text{ u}$.

a.

Bepaal het massadefect die bij het alfaverval hoort.

b.

Bepaal het massadefect die bij het betaverval hoort.

c.

Leg uit dat alfaverval wel mogelijk is en bètaverval niet.

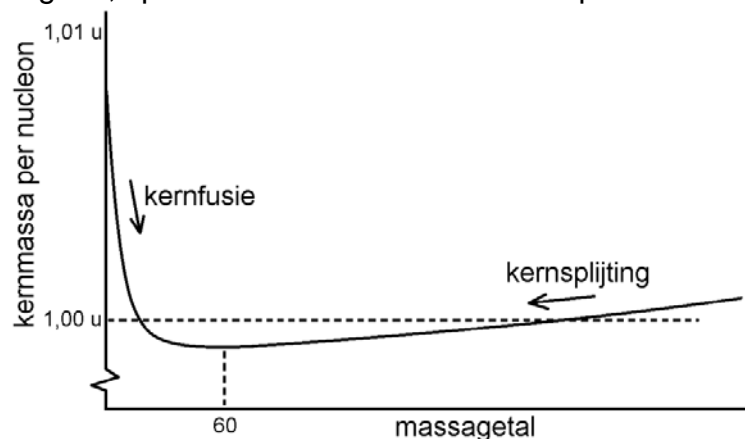
§ 8 Bindingsenergie van atoomkernen

Kernmassa

Ter herinnering volgt hier eerst wat basisinformatie. Atoomkernen zijn opgebouwd uit protonen en neutronen. Protonen en neutronen worden nucleonen (kerndeeltjes) genoemd. Onder het massagetal van een atoomkern verstaan we het aantal nucleonen waaruit deze kern is opgebouwd. Protonen en neutronen hebben bijna dezelfde massa die zeer dicht bij 1 u (atomaire massa-eenheid) ligt.

Het massagetal is bij benadering een goede maat voor de kernmassa. Als we de kernmassa delen door het massagetal, spreken we over de kernmassa per nucleon.

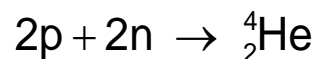
Van alle atoomkernen ligt de kernmassa per nucleon zeer dicht bij 1 u. Toch zien we kleine verschillen. De kernmassa per nucleon is het laagst bij massagetalen rond 60. Zie het diagram hiernaast waarin het globale verloop van de kernmassa per nucleon is uitgezet tegen het massagetal.



In het diagram zijn kernfusie en kernsplijting aangegeven. Bij kernfusie worden kleine atoomkernen gecombineerd tot grotere kernen. Zoals uit het diagram blijkt, verdwijnt er dan wat massa en wordt rustenergie omgezet in een andere energievorm. Bij kernsplijting worden zware atoomkernen gesplitst in kleinere kernen. Ook nu verdwijnt er wat massa en komt er, net als bij kernfusie, energie vrij. We zien aan de steilheid van de grafiek dat de energieopbrengst per nucleon bij kernfusie veel groter is dan bij kernsplijting.

Bindingsenergie

Een atoomkern zou je theoretisch kunnen ‘maken’ door losse protonen en losse neutronen bij elkaar te brengen. Bijvoorbeeld kan de vorming van een helium-4 kern uit twee losse protonen en twee losse neutronen door de volgende vergelijking beschreven worden.



Bij het ontstaan van een atoomkern uit losse protonen en neutronen komt er energie vrij: de zogenoemde bindingsenergie. Omgekeerd kost het energie om een atoomkern te ontleden in losse protonen en neutronen. Bijvoorbeeld komt er 28,3 MeV vrij bij het ontstaan van een helium-4 kern en kost het ook 28,3 MeV om een heliumkern te ontleden.

Samenvattend geldt dus:

De bindingsenergie van een atoomkern is de energie die vrij komt als deze atoomkern uit losse nucleonen wordt opgebouwd en omgekeerd de energie die nodig is om de atoomkern te scheiden in losse nucleonen.

Als losse protonen en neutronen bij elkaar komen en er een atoomkern ontstaat, neemt de massa af. Uit het massadefect volgt de bindingsenergie van die atoomkern. Laten we de bovenstaande reactie nemen. Het massadefect Δm kan als volgt berekend worden.

$$\Delta m = 2 \cdot m(\text{proton}) + 2 \cdot m(\text{neutron}) - m(\text{helium-4 kern}) = 0,03038 \text{ u.}$$

Er komt dan $0,03038 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 28,3 \text{ MeV}$ aan energie vrij.

Bindingsenergie per nucleon

Elke atoomkern heeft zijn eigen bindingsenergie. Zie de volgende voorbeelden.

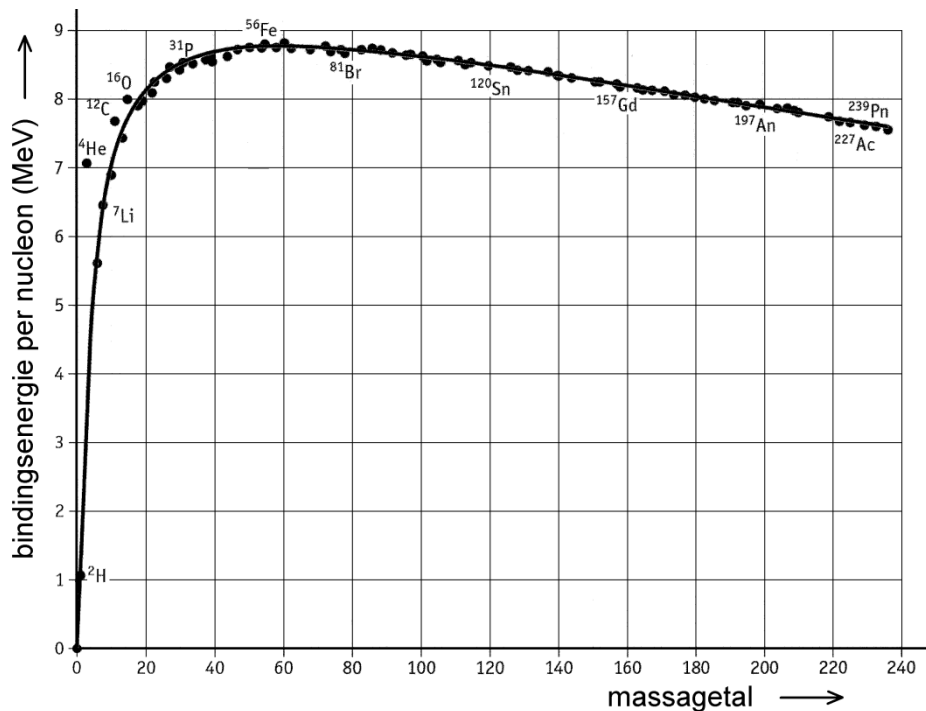
| | |
|-------------------|---------------------------|
| Helium-4 kern: | 28,3 MeV (zie hierboven); |
| Zuurstof-16 kern: | 128 MeV; |
| IJzer-56 kern: | 492 MeV; |
| Uranium-238 kern: | 1802 MeV. |

Als je naar deze waarden kijkt, zou je kunnen denken dat van de vier genoemde kernen de uranium-238 kern het stabielst is. Bij zijn ontstaan uit losse nucleonen (dit zijn protonen en neutronen) komt er immers de meeste energie vrij. Toch is dit niet het geval want er zijn ook heel veel nucleonen bij betrokken. Met hetzelfde aantal losse nucleonen zou je bijvoorbeeld meerdere (veel kleinere) ijzer-56 kernen kunnen maken. Het is daarom eerlijker om de bindingsenergie te delen door het massagetal.

Aldus krijgen we:

| | |
|-------------------|---|
| Helium-4 kern: | $28,3 / 4 = 7,1 \text{ MeV}$ (zie hierboven); |
| Zuurstof-16 kern: | $128 / 16 = 8,0 \text{ MeV}$; |
| IJzer-56 kern: | $492 / 56 = 8,8 \text{ MeV}$; |
| Uranium-238 kern: | $1802 / 238 = 7,6 \text{ MeV}$. |

Binnen het rijtje heeft ijzer-56 de hoogste bindingsenergie per nucleon. Deze atoomkern is daarmee het stabielst. In het diagram hiernaast is de bindingsenergie per nucleon uitgezet tegen het massagetal. Ga na dat ijzer-56 en nikkel-60 op de top van de grafiek liggen.



Merk op dat dit diagram het omgekeerde gedrag vertoont van het eerdere diagram. Naarmate de massa per nucleon afneemt, wordt de bindingsenergie per nucleon groter en omgekeerd.

Opgaven bij § 8

Opgave 1

Druk in deze opgave de massa uit in u (= atomaire massa-eenheid) en werk met minstens 5 decimalen.

De kernmassa van helium-4 bedraagt 4,001505 u.

a.

Bereken de kernmassa per nucleon van helium-4.

De kernmassa van nikkel-60 bedraagt 59,91542 u.

b.

Bereken de kernmassa per nucleon van nikkel-60.

De kernmassa van uranium-238 bedraagt 238,00027 u.

c.

Bereken de kernmassa per nucleon van uranium-238.

d.

Vergelijk de uitkomsten van a, b en c met elkaar. Leg uit dat dit in overeenstemming is met de leestekst.

e.

De massa van een los proton bedraagt 1,007276 u.

De massa van een los neutron bedraagt 1,008665 u.

Vergelijk deze waarden met de bovengevonden waarden. Wat valt je op?

Opgave 2

a.

Schrijf de reactievergelijking op waarbij een uranium-235 kern uit losse protonen en neutronen voortkomt.

De massa van een uranium-235 kern bedraagt 234,9935 u.

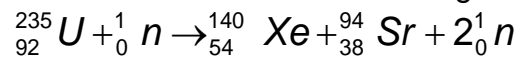
De massa van een los proton bedraagt 1,007276 u.

De massa van een los neutron bedraagt 1,008665 u.

b.

Toon aan dat de bindingsenergie per nucleon van uranium-235 gelijk is aan 7,6 MeV.

In een kerncentrale vindt de volgende reactie plaats.



c.

Lees uit het diagram in de leestekst (de bindingsenergie per nucleon uitgezet tegen het massagetal) af hoe groot de bindingsenergie per nucleon is van de xenon-140 kern en van de strontium-94 kern.

d.

Bereken met deze gegevens hoeveel energie (in MeV) bij deze reactie vrijkomt.

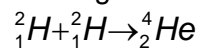
Opgave 3

In een bepaalde fase van het bestaan van een ster kan de kern van de ster vrijwel geheel uit helium bestaan. In relatief korte tijd kan al dat helium worden omgezet in koolstof. Dit gebeurt alleen bij relatief zware sterren. Stel dat de kern van een zware ster een massa van $4,00 \cdot 10^{30}$ kg heeft (dit is twee keer de massa van onze zon) en dat deze kern geheel uit helium-4 bestaat. Bepaal dan hoeveel joule energie er vrijkomt bij de omzetting van deze gehele heliumvoorraad in koolstof-12. Doe dat op de volgende manier.

- Stap 1: Lees uit het bovenstaande diagram de toename aan bindingsenergie per nucleon af bij deze omzetting.
- Stap 2: Bereken het totaal aantal nucleonen dat in de kern van deze ster zit.
- Stap 3: Combineer stap 1 en 2.

Opgave 4

Stel je de volgende niet reële situatie voor. Iemand laat in een eigen kernfusiereactor 20 kilogram deuterium (waterstof-2) fuseren tot helium-4 volgens de volgende reactie.



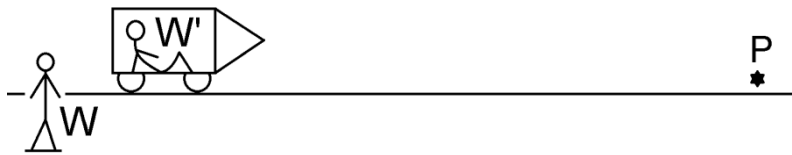
Bereken dan hoeveel joule daarbij vrijkomt. Maak daarbij gebruik van het bovenstaande diagram.

Afleiding van formules met relativistische impuls en energie

In de volgende theorie maken we onderscheid tussen twee snelheden. Het ene inertiaalstelsel beweegt met snelheid u ten opzichte van het andere inertiaalstelsel. Een deeltje beweegt met snelheid v voor een waarnemer in een inertiaalstelsel.

Lorentztransformatie

In de onderstaande figuur beweegt waarnemer W' ten opzichte van waarnemer W met snelheid u naar rechts. Op het moment dat de oorsprongen van W en W' samenvallen, zetten beiden hun klokken op nul. We beschouwen een willekeurige gebeurtenis P . In de figuur is deze met een ster aangegeven.



Allereerst definiëren we de symbolen β en γ als volgt (met c = lichtsnelheid):

$$\beta = \frac{u}{c} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Voor waarnemer W zijn de coördinaten van de gebeurtenis t (= tijd) en x (= plaats). Voor W' kunnen de coördinaten t' en x' van dezelfde gebeurtenis met de lorentztransformatie uit t en x berekend worden. Zie de onderstaande twee vergelijkingen.

$$ct' = \gamma(ct - \beta \cdot x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta \cdot ct)$$

Viervector

We zijn in de natuurkunde gewend aan 3-dimensionale vectoren. Denk bijvoorbeeld aan kracht- en snelheidsvectoren. Zo bevat een krachtvector drie componenten, namelijk F_x , F_y en F_z . Hierna wordt gebruik gemaakt van viervectoren. Een viervector bevat vier componenten. Zo bevat viervector A (altijd als hoofdletter schrijven!) de componenten a_0 , a_1 , a_2 en a_3 . Dit kan kort opgeschreven worden als:

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

Het inwendig product $A \cdot B$ van twee viervectoren A en B is per definitie:

$$A \cdot B = a_0 \cdot b_0 - a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3$$

Voor een viervector geldt dat zijn componenten voor de ene waarnemer (W) kunnen worden omgerekend naar de componenten voor de andere waarnemer (W') door middel van de lorentztransformatie. Als we ons verder beperken tot een viervector A waarvan alleen de eerste twee componenten getransformeerd worden en de laatste twee componenten steeds nul zijn (dus $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2' = 0$ en $a_3' = 0$), geldt:

$$a_0' = \gamma(a_0 - \beta \cdot a_1)$$

$$a_1' = \gamma(a_1 - \beta \cdot a_0)$$

Twee belangrijke eigenschappen van viervectoren zijn de volgende:

Eigenschap 1

Het inwendig product van een viervector met zichzelf geeft voor iedere waarnemer dezelfde uitkomst. Anders gezegd: het inwendig product is invariant.

In het geval van $A = (a_0, a_1, 0, 0)$ en $A' = (a_0', a_1', 0, 0)$ geldt dus: $a_0^2 - a_1^2 = a_0'^2 - a_1'^2$

Eigenschap 2

Als je de componenten van een viervector vermenigvuldigt met een constante factor k die voor alle waarnemers gelijk is, ontstaat er een nieuwe viervector.

Positie-viervector

In het algemeen wordt een gebeurtenis gekenmerkt door de drie ruimtelijke coördinaten x , y en z en één tijdcoördinaat t . We definiëren nu de positie-viervector X als:

$$X = (ct, x, y, z).$$

Door deze keuze van de componenten is X automatisch een (relativistische) viervector.

Het inwendig product van X met zichzelf wordt:

$$X \cdot X = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Omdat wij ons beperken tot gebeurtenissen langs de x -as (dus $y = z = 0$) wordt dit:

$$X \cdot X = (ct)^2 - x^2.$$

In het rechterlid herkennen we het kwadraat van het ruimtetijdinterval dat wordt aangegeven met s^2 . Omdat het ruimtetijdinterval invariant is (dus niet verschilt van waarnemer tot waarnemer), geldt:

$$X \cdot X = X' \cdot X'$$

Aan de eerder genoemde eerste eigenschap van viervectoren is dus voldaan.

Verplaatsings-viervector

Naast de coördinaten van een gebeurtenis laten zich ook coördinaatverschillen met de lorentztransformatie omrekenen van de ene naar de andere waarnemer. Stel dat er twee (willekeurige) gebeurtenissen plaatsvinden. Als Δt de tijd tussen beide gebeurtenissen is en Δx het verschil tussen de x -coördinaten van de gebeurtenissen (en analoog voor Δy en Δz), kunnen we de verplaatsing-viervector als volgt definiëren.

$$\Delta X = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

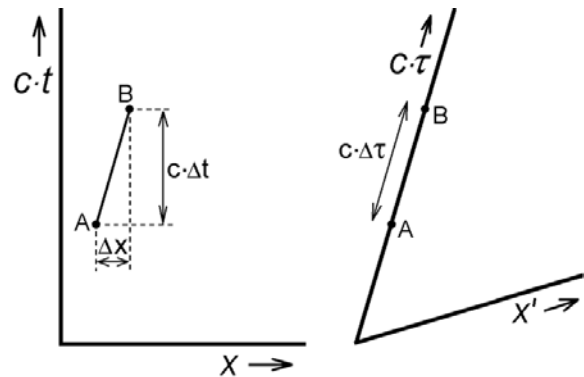
Voor het inwendig product van ΔX met zichzelf geldt:

$$\Delta X \cdot \Delta X = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Het rechterlid is weer het kwadraat van het ruimtetijdinterval (symbool s^2) tussen beide gebeurtenissen. Dit interval is invariant wat in overeenstemming is met de eerste eigenschap.

Viersnelheid

Laten we nu een deeltje volgen dat zich verplaatst van plaats A naar plaats B. Hiernaast is voor twee referentiestelsels de wereldlijn van het deeltje in het minkowskidiagram getekend. In het linker diagram heeft het deeltje een snelheid v voor de waarnemer. In het rechter diagram is het deeltje voor de waarnemer in rust. De tijd voor deze waarnemer is met τ aangeduid.



Omdat het ruimte-tijdinterval invariant is, geldt:

$$(c\Delta t)^2 - \Delta x^2 = (c\Delta \tau)^2$$

Hierin is $\Delta \tau$ de tijd die verstreken is volgens de met het deeltje meebewegende waarnemer: de zogenoemde 'eigentijd'.

Omdat $\Delta x = v \cdot \Delta t$ volgt hieruit:

$$(c^2 - v^2) \cdot \Delta t^2 = c^2 \cdot \Delta \tau^2.$$

Hieruit volgt:

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

We zien hieruit dat de verstreken tijd Δt altijd groter is dan de eigentijd $\Delta \tau$.

In het algemeen geldt dat de snelheid van een deeltje berekend kan worden door zijn verplaatsing Δx te delen door de tijdsduur Δt . Als we iedere component van de verplaatsings-vektor delen door Δt , krijgen we een viervector voor de snelheid: de zogenoemde viersnelheid. We moeten hierbij echter goed nadenken over de tijdsduur waarmee je deelt. Deze tijdsduur moet invariant zijn. We willen namelijk dat de viersnelheid een viervector is. Een voor de hand liggende keus is daarom om te delen door de eigentijd $\Delta \tau$. De viersnelheid V wordt dan dus:

$$V = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \frac{\Delta z}{\Delta \tau} \right).$$

Merk op dat V een viervector is dankzij de eerder genoemde tweede eigenschap van viervectoren. Alle componenten delen door $\Delta \tau$ komt immers overeen met het vermenigvuldigen met een factor k .

Als we stellen dat $\Delta y = \Delta z = 0$, geldt voor de viersnelheid:

$$V = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right).$$

In deze vergelijking is v de snelheid van het deeltje in de x -richting.

De viersnelheid van het deeltje voor de meebewegende waarnemer is:

$$V' = (c, 0, 0, 0).$$

Ga na dat het inwendig product van V met zichzelf voor elke waarnemer c^2 bedraagt en deze is natuurlijk ook weer invariant (zie de eerste eigenschap).

Vierimpuls

We vermenigvuldigen nu elke component van de viersnelheid met de (invariante!) massa m van het deeltje. We krijgen dan de viervector voor de impuls: de zogenoemde vierimpuls P . Uitgaande van de vergelijking voor V krijgen we dan:

$$P = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right).$$

Als we naar de tweede component van P kijken, herkennen we in de teller de klassieke impuls mv . De relativistische impuls is dan:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

De relativistische impuls is dus altijd groter dan de klassieke impuls. Als v veel kleiner dan c is, is de noemer praktisch 1 en gaat de relativistische impuls over in de klassieke impuls.

Als we naar de eerste component van P kijken, kunnen we daar in eerste instantie weinig betekenis aan toekennen. Als we deze eerste component echter met c vermenigvuldigen en hem vervolgens als reeksontwikkeling schrijven, krijgen we:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \frac{15}{48}m\frac{v^6}{c^4} + \dots$$

De tweede term van het rechterlid is de kinetische energie $\frac{1}{2}mv^2$ van het deeltje.

Voor alle termen geldt dat ze de eenheid van energie hebben. Ze stellen dus een bepaalde energiebijdrage voor. We nemen daarom aan dat alle termen bij elkaar de totale energie E voorstellen. De eerste component van de vierimpuls is dan dus E/c . Voor de totale energie van het deeltje geldt dus:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Verband tussen de energie en de impuls van een deeltje

De vierimpuls kan geschreven worden als:

$$P = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0 \right)$$

Omdat P een viervector is, is het inwendig product van P met zichzelf invariant. Er geldt dus:

$$\left(\frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = \left(\frac{E'}{c} \right)^2 - p'^2.$$

In het rechterlid zijn de energie en impuls voorzien van accentjes om aan te geven dat deze grootheden betrekking hebben op waarnemer W' . Als we voor W' de met het deeltje meebewegende waarnemer kiezen, geldt $p'=0$ en $E' = mc^2$. De laatste vergelijking kunnen we dan schrijven als:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Transformatie van energie en impuls tussen twee waarnemers

Stel dat twee waarnemers W en W' met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen en dat beiden een deeltje observeren. Zoals steeds beperken we ons hierbij in de ruimte tot eendimensionale situaties (geen beweging in de y - of z -richting). Voor W heeft het deeltje een energie E en een impuls p . Voor W' heeft het deeltje een energie E' en een impuls p' . Omdat de vierimpuls een viervector is, kunnen E' en p' met behulp van de lorentztransformatie uit E en p worden gevonden.

We moeten duidelijk onderscheid maken tussen twee snelheden: de snelheid van de waarnemers ten opzichte van elkaar en de snelheid van het deeltje ten opzichte van een waarnemer. Voor de transformatie van E en p naar E' en p' is de eerste snelheid van belang. Als u de snelheid van W' ten opzichte van W is, stellen we:

$$\beta = \frac{u}{c} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Door gebruikmaking van deze twee factoren, wordt de transformatie van E en p :

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta \cdot p \right) \quad \text{en} \quad p' = \gamma \left(p - \beta \cdot \frac{E}{c} \right).$$

Merk op dat deze transformatie sterk lijkt op de transformatie voor ruimte en tijd. Impuls en energie zijn aan elkaar verwant als ruimte en tijd.