Uitwerkingen § 1

<u>Opgave 1</u>
Een inertiaalstelsel is een referentiestelsel waarin de eerste wet van Newton geldt.

<u>Opgave 2</u>
Een gebeurtenis is een fysische situatie of voorval op één bepaalde plaats en op één bepaald tijdstip.

Een wereldlijn is een lijn in het tijd-plaats-diagram die het verband tussen tijd en plaats van een voorwerp (of iets anders) weergeeft.

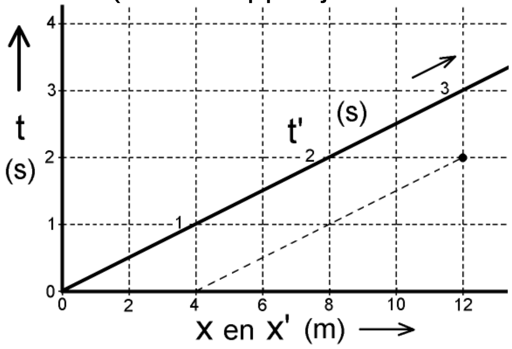
<u>Opgave 3</u>
a. Niet waar
b. Waar
c. Niet waar

<u>Opgave 4</u>
a. 0 m/s
b. 7/8 m/s = 0,875 m/s
c. -9/3 m/s = -3 m/s
d. ∞ (oneindig)

<u>Opgave 5</u>
a.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12\,\text{m}}{3\,\text{s}} = 4\,\text{m/s}$$

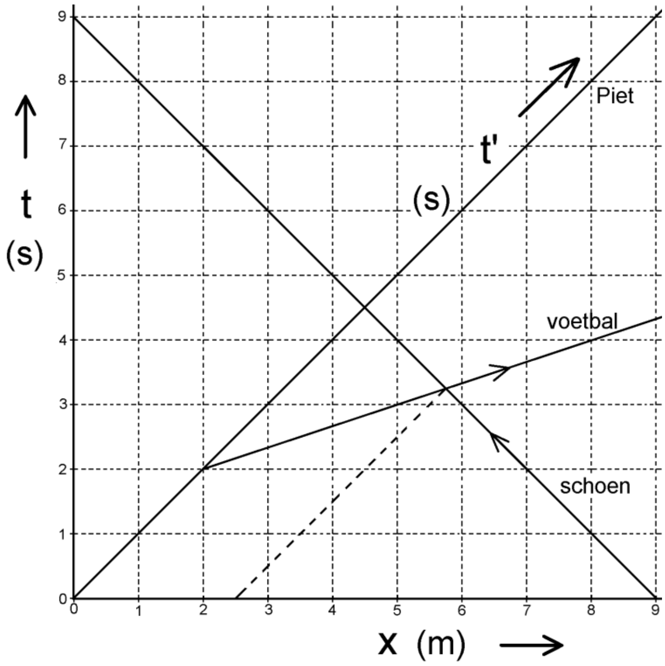
b.
t' = 2 s
x' = 4 s (zie de stippellijn in het onderstaande diagram)



<u>Opgave 6</u>
a.
x' = x - v·t = 40 - 70·(20/60) = 17 km
b.
x = x' + v·t' = 6 + 70·(35/60) = 47 km

Opgave 7

a. en b. en c.

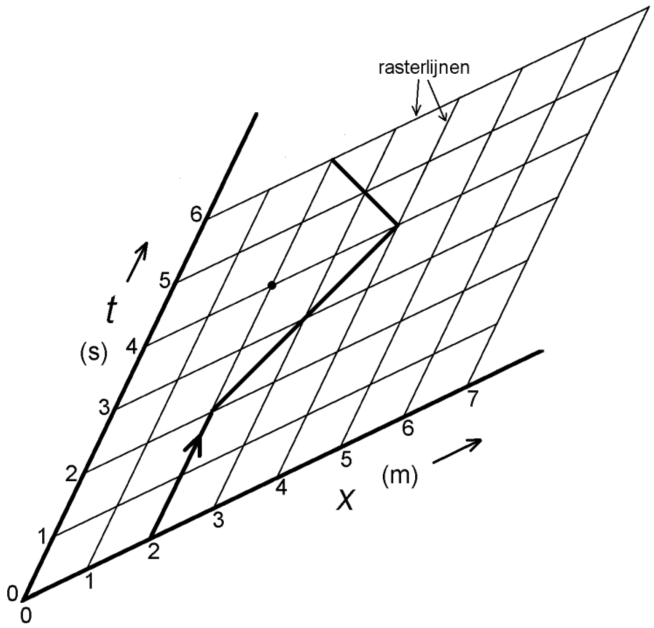


d.

De voetbal en de schoen kruisen elkaar op x’ = 2,5 m (zie de stippellijn).

Opgave 8

a.



b.

0 m

Uitwerkingen § 2

Opgave 1
De wetten van de natuurkunde zijn in elk inertiaalstelsel dezelfde.
De lichtsnelheid in vacuüm is in elk inertiaalstelsel gelijk.

Opgave 2
a.
0 m/s
b.
Het foton gaat voor de racefietser ook met de lichtsnelheid.

Opgave 3
$1\text{ls} = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 1\text{s} = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m}$
$1\text{ly} = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m}$

Opgave 4
a.
Voor Jan legt het licht van L1 naar hem een even grote weg af als het licht van L2 naar hem.
b.
Voor Sjoerd legt het licht van L2 naar Jan een kortere weg af dan het licht van L1 naar Jan.

Opgave 5
a.
Voor Piet is de door het licht af te leggen afstand (zowel heen als terug) onafhankelijk van de treinsnelheid.
b.
De heenweg voor het licht wordt langer en de terugweg voor het licht wordt korter.
De heenweg duurt dus langer en de terugweg korter.

Opgave 6
a.
$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{2\text{x}8633}{3{,}00 \cdot 10^8} = 5{,}76 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$
b.
Eén omwenteling duurt 1 / 12,6 = 0,0794 s.
Eén tand plus één opening duren 0,0794 / 720 = 0,000110 s.
Eén tand duurt 0,000110 / 2 = $5{,}51 \cdot 10^{-5}$ s.
c.
$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\text{x}8633}{5{,}51 \cdot 10^{-5}} = 3{,}13 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Opgave 7

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2x140 \cdot 10^9}{22 \cdot 60} = 2{,}12 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

De afwijking met de correcte snelheid is: $\frac{3{,}00 - 2{,}12}{3{,}00} x100\% = 29\%$.

Uitwerkingen § 3

Opgave 1
Voor een waarnemer verlopen alle processen in een voor hem bewegend systeem langzamer.

Opgave 2
Voor een waarnemer verlopen alle processen in een voor hem bewegend systeem langzamer.

Opgave 3
a.
A en C.
b.
A en C.
c.
Jan versnelt niet. Jim versnelt bij het begin van zijn reis, vertraagt en versnelt halverwege zijn reis en vertraagt aan het einde van zijn reis.

Opgave 4
De tweede methode verdient de voorkeur omdat de draagbare klok langzamer gaat lopen (ten opzichte van het stilstaande referentiestelsel) als hij een snelheid krijgt.

Opgave 5

$$\Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{55}{\sqrt{1-0{,}80^2}} = 92\text{ s}$$

Opgave 6
a.

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{0{,}50}{0{,}99 x 3{,}00 \cdot 10^8} = 0{,}168 \cdot 10^{-8}\text{ s}$$

b.

$$\Delta t_o = \Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}168 \cdot 10^{-8} \cdot \sqrt{1-0{,}99^2} = 0{,}237 \cdot 10^{-9}\text{ s}$$

Opgave 7

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_o} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ wordt } 1{,}30 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Hieruit volgt:

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1{,}30^2}$$

v/c = 0,64 dus 64%

Opgave 8

a.

$$\Delta s = c \cdot \Delta t = 3{,}00 \cdot 10^{8} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 6{,}6 \cdot 10^{2}\ \text{m}$$

b.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}2\,\mu s}{\sqrt{1-0{,}999^2}} = 49{,}2\ \mu\text{s}$$

c.

Gemakshalve stellen we de snelheid van een muon op 100% van de lichtsnelheid.

$$\Delta s = c \cdot \Delta t = 3{,}00 \cdot 10^{8} \cdot 49{,}2 \cdot 10^{-6} = 148 \cdot 10^{2}\ \text{m} = 14{,}8\ \text{km}$$

Geen probleem dus om de dampkring te doorlopen.

Opgave 9

Een tijdsduur van 1 s voor het atoom correspondeert met een tijdsduur van

$$\Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1\,\text{s}}{\sqrt{1-0{,}75^2}} = 1{,}51\,\text{s}$$ voor waarnemer W.

De door W waargenomen frequentie is dan $\frac{1{,}0 \cdot 10^{15}}{1{,}51} = 0{,}66 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}$.

Uitwerkingen § 4

Opgave 1

a.

De piloot is in rust ten opzichte van zijn raket.

b.

$$L = L_o \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 50 \cdot \sqrt{1-0{,}40^2} = 46\ \text{m}$$

c.

$L = L_o \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ wordt $40 = 50 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Hieruit volgt: v = 0,60·c.

Opgave 2

a.

$$L = L_o \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = (10\ \text{km}) \cdot \sqrt{1-0{,}999^2} = 447\ \text{m}$$

b.

Stel de snelheid van het muon gemakshalve gelijk aan c. Dan geldt:

$\Delta s = c \cdot \Delta t = 3{,}00 \cdot 10^8 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 660\ \text{m}$

Het aardoppervlak kan dus gemakkelijk bereikt worden.

Opgave 3

Het zit 'm in het feit dat gelijktijdigheid geen absoluut begrip is. Voor waarnemer W' zijn de deuren dus niet op hetzelfde moment gesloten. Eerst wordt de voordeur eventjes gesloten en daarna de achterdeur.

Opgave 4

a.

$$\Delta L = L_o - L = L_o - L_o \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}\beta^2\right) = \tfrac{1}{2} \cdot L_o \cdot \beta^2$$

b.

$$\Delta L = \tfrac{1}{2} \cdot L_o \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot (5576\ \text{km}) \cdot \left(\frac{599{,}4}{3{,}00 \cdot 10^8}\right)^2 = 11{,}1\ \mu\text{m}$$

Opgave 5

Er vindt alleen lengtekrimp in de rijrichting plaats, niet in de breedte of in de hoogte. Er geldt dan:

$$L = L_o \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = (1\text{m}) \cdot \sqrt{1-0{,}90^2} = 0{,}44\ \text{m}$$

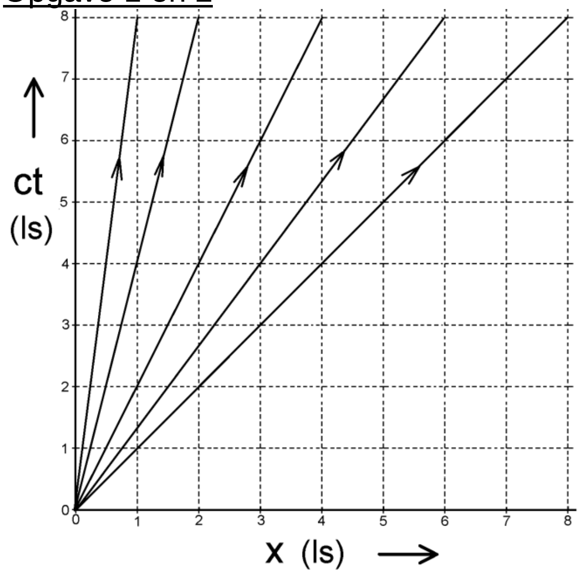
Het volume is dan dus 0,44 m^3.

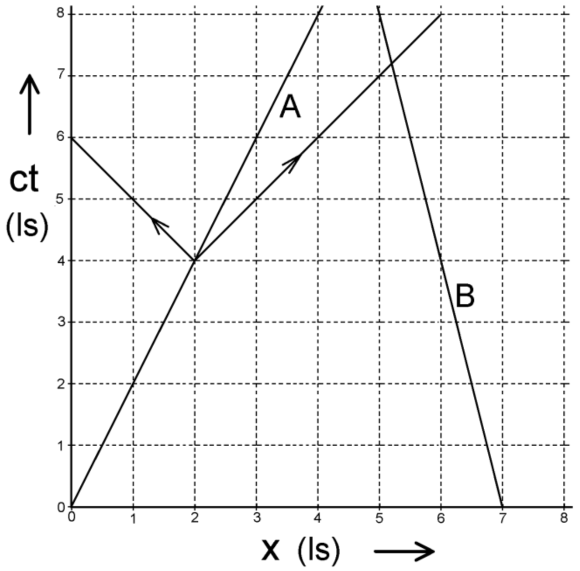
Opgave 6
Pi wordt kleiner omdat de omtrek kleiner wordt.

Opgave 7
vrachtwagen geen
tunnel wel

Uitwerkingen § 5

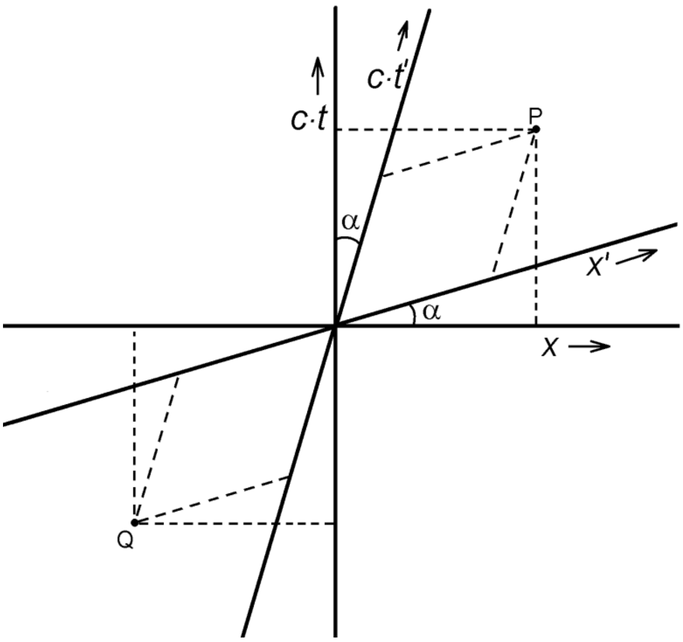
Opgave 1 en 2





Bij opgave 2a: raket A: 0,5·c en raket B: 0,25·c.

Opgave 3

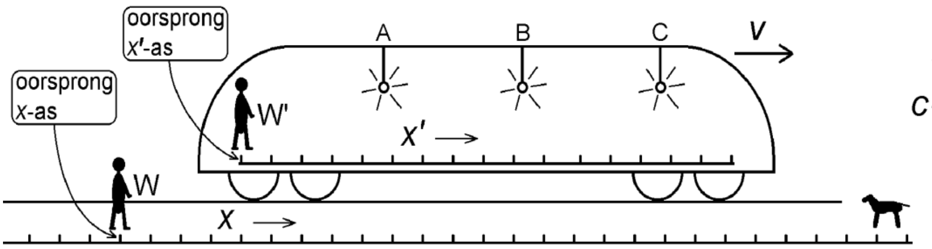


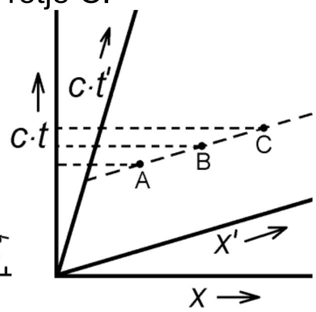
Opgave 4

Doordat de hoeken gelijk zijn, vallen de diagonalen van de ruitjes samen met wereldlijnen van fotonen (dus onder een hoek van 45°). Zodoende blijft de lichtsnelheid gelijk voor de stilstaande en de bewegende waarnemer.

Opgave 5
Volgens waarnemer W: eerst P en dan Q.
Volgens waarnemer W’: eerst Q en dan P.

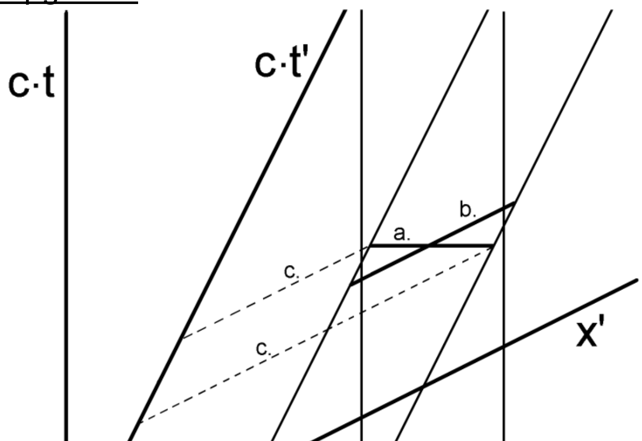
Opgave 6
a. en b.
Voor waarnemer W knalt eerst rotje A, daarna rotje B en tot slot rotje C.





c.
De tijdsvolgorde is voor de hond en voor waarnemer W gelijk. De hond heeft namelijk hetzelfde referentiestelsel als waarnemer W. Hooguit is de plaatsas (x-as) verschoven maar dat maakt niet uit.

Opgave 7

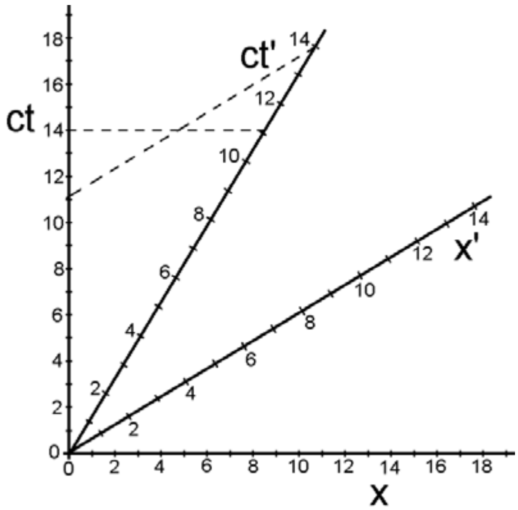


Uit de stippellijnen behorend bij opgave c. volgt dat voor waarnemer W’ de voorste schuurdeur eerst even dichtgaat en de achterste schuurdeur daarna.

Uitwerkingen § 6

Opgave 1
Als waarnemer W' voor waarnemer W in de positieve x-richting beweegt, beweegt waarnemer W voor waarnemer W' in de negatieve x'-richting. Stel bijvoorbeeld dat W en W' ieder in een rijdende trein zitten en dat de trein van W' de trein van W inhaalt. Voor W beweegt de trein van W' dan vooruit en voor W' beweegt de trein van W dan achteruit.

Opgave 2
Zie het diagram hiernaast.
a. Iets meer dan 11 miljard jaar
b. Iets meer dan 11 miljard jaar



Opgave 3
a.
$\beta = 0{,}30$

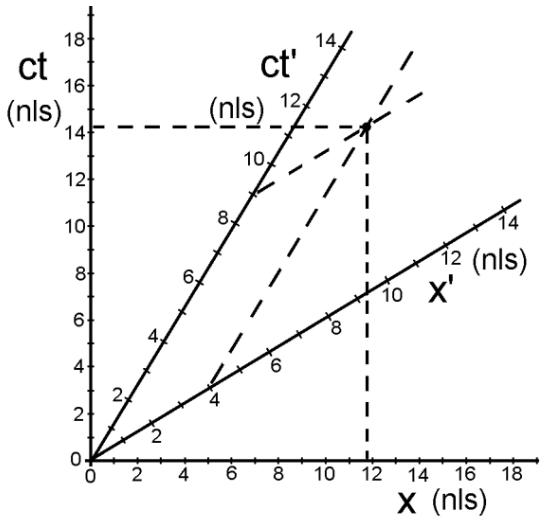
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}30^2}} = 1{,}05$$

b.
$ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot x) = 1{,}05 \cdot (5{,}1 - 0{,}30 \cdot 4{,}4) = 4{,}0$
Dus het heeft 4,0 jaar geduurd.
c.
De formule voor de tijdsduurrek kan alleen gebruikt worden als de twee gebeurtenissen (hier: het passeren van de aarde en het afgeven van het signaal door de UFO) voor één van de twee waarnemers op dezelfde locatie plaatsvindt.
d.
$x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot ct) = 1{,}05 \cdot (4{,}4 - 0{,}30 \cdot 5{,}1) = 3{,}0$
Dus 3,0 lichtjaar verwijderd.

Opgave 4
a.
De hoek is 31°.
b.
β = v/c = tan(31°) = 0,60 dus het proton gaat met 60% van de lichtsnelheid.
c.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}60^2}} = 1{,}25$$

d.
$x = \gamma \cdot (x' + \beta \cdot ct') = 1{,}25 \cdot (4 + 0{,}60 \cdot 9) = 11{,}75$
$ct = \gamma \cdot (ct' + \beta \cdot x') = 1{,}25 \cdot (9 + 0{,}60 \cdot 4) = 14{,}25$
Klopt met het diagram (zie hiernaast).



Opgave 5

a.

5,2 + 1,7 = 6,9 jaar.

b.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64^2}} = 1{,}3$$

c.

$$ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot x) = 1{,}3 \cdot (5{,}2 - 0{,}64 \cdot 1{,}7) = 5{,}3\ \text{ly}$$

Dus 5,3 jaar.

d.

$$x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot ct) = 1{,}3 \cdot (1{,}7 - 0{,}64 \cdot 5{,}2) = -2{,}1\,\text{ly}$$

Dus op 2,1 lichtjaar afstand. Vanwege het minteken van x' vindt de ontploffing achter de raket plaats.

Opgave 6

Zie het onderstaande diagram.

a.

Eerste methode: Afgelegde afstand is 0,50 x 14 = 7,0 miljard lichtjaar.

Tweede methode: Voor de hoek tussen de ct- en ct' geldt: $\alpha = \arctan(0{,}50) = 26{,}6°$.

b.

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 14 \cdot \sqrt{1 - 0{,}50^2} = 12{,}1$$

Dus 12,1 miljard jaar.

c.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}50^2}} = 1{,}155$$

$$ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot x) = 1{,}155 \cdot (14 - 0{,}50 \cdot 7{,}0) = 12{,}1$$

Dus 12,1 miljard jaar.

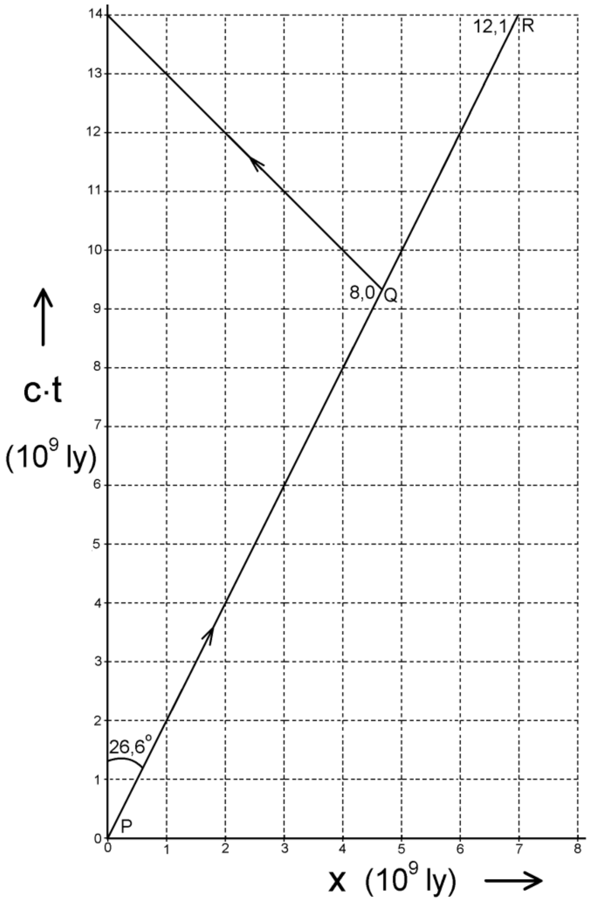
d.

Zie diagram

e.

Lijnstuk PQ is 0,66 keer zo lang als lijnstuk PR (zie het onderstaande diagram).

Het sterrenstelsel is dus 0,66 x 12,1 = 8,0 miljard jaar oud.



Opgave 7

a.

De factor γ is afkomstig van de tijdsduurverlenging.

b.

Bekijk alles vanuit waarnemer W. In γ seconde verplaatst de bron zich over een afstand Δx = β·γ lichtseconde. Het licht doet er vervolgens β·γ seconde over om terug te komen bij W.

c.

$$\gamma + \beta\gamma = \gamma(1+\beta) = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Ter informatie nog het volgende.

Uit $f_o = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot f_b$ volgt voor de golflengtes van het licht: $\lambda_o = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \lambda_b$.

Als β klein is, kan dit vereenvoudigd worden tot $\lambda_o = (1+\beta)\cdot\lambda_b$.

Voor de golflengteverandering $\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda_b$ geldt dan $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_b} = \beta$.

Dat wil zeggen dat de relatieve golflengteverandering gelijk is aan de snelheid van de lichtbron gedeeld door de lichtsnelheid. Hiermee kan bijvoorbeeld de snelheid van het uitdijende heelal bepaald worden.

Uitwerkingen § 7

<u>Opgave 1</u>
a.
Neem de raket als waarnemer W' en de aarde als waarnemer W.

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$100^2 - \Delta x^2 = 120^2 - 200^2$$

Δx = 189 ls.
b.
Het kwadraat van het ruimtetijdinterval is negatief dus er kan geen oorzakelijk verband tussen beide ontploffingen zijn.

<u>Opgave 2</u>

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$0^2 - 20^2 = c^2\Delta t'^2 - 30^2$$

$$c^2\Delta t'^2 = 30^2 - 20^2 = 500$$

Δt' = 22 ns.

<u>Opgave 3</u>
a.

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$1^2 - 0^2 = 2^2 - \Delta x'^2$$

Δx' = 1,7 ls
b.

$$v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{1{,}7\ \text{ls}}{2{,}0\ \text{s}} = 0{,}85 \cdot \text{c}$$

<u>Opgave 4</u>
a.

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$60^2 - 40^2 = c^2\Delta t'^2 - 0^2$$

$$c^2\Delta t'^2 = 60^2 - 40^2 = 2000$$

$$c\Delta t' = 44{,}7\ \text{nls}$$

b.

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{40\ \text{nls}}{60\ \text{ns}} = 0{,}667 \cdot \text{c}$. Bedenk daarbij dat $\text{c} = \frac{1\ \text{ls}}{1\ \text{s}} = \frac{1\ \text{nls}}{1\ \text{ns}}$.

Dus geldt $\beta = 0{,}667$.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}667^2}} = 1{,}34$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{60}{1{,}34} = 44{,}7\ \text{ns}$$

Opgave 5

a.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3\ \text{nls}}{7\ \text{ns}} = 0{,}429 \cdot \text{c}$$

b.

$$\Delta t_0 = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \Delta t = \sqrt{1-0{,}429^2} \cdot 7{,}0 = 6{,}3\ \text{ns}$$

c.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}429^2}} = 1{,}107$$

$ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot x) = 1{,}107 \cdot (7{,}0 - 0{,}429 \cdot 3{,}0) = 6{,}3\ \text{nls}$ dus $t' = 6{,}3\ \text{ns}$

d.

$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$

$7{,}0^2 - 3{,}0^2 = c^2t'^2 - 0^2$

$ct' = 6{,}3\ \text{nls}$ dus $t' = 6{,}3\ \text{ns}$

Opgave 6

a.

Positief; ja

b.

Negatief; nee

c.

Als de verbindingslijn tussen de twee gebeurtenissen steiler loopt dan de wereldlijn van een foton, kan er wel een causaal verband zijn. Bij minder steil kan het niet.

Uitwerkingen § 8

Opgave 1

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} = \frac{0{,}4 \cdot c + 0{,}5 \cdot c}{1 + \frac{0{,}4 \cdot c \cdot 0{,}5 \cdot c}{c^2}} = 0{,}75 \cdot c$$

Opgave 2

a.

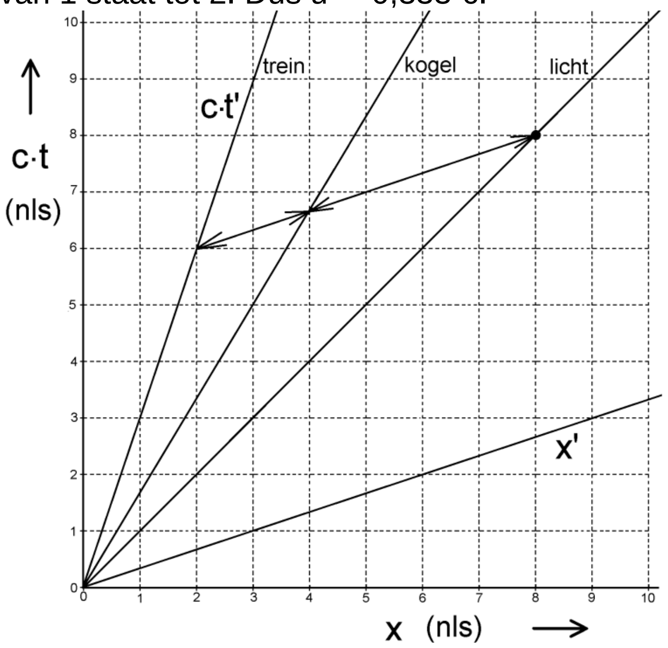
v = 0,333·c

b.

u = 0,6·c

c.

De twee getekende pijlen in de onderstaande figuur hebben een lengteverhouding van 1 staat tot 2. Dus u’ = 0,333·c.



d.

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} = \frac{0{,}333 \cdot c + 0{,}333 \cdot c}{1 + \frac{0{,}333 \cdot c \cdot 0{,}333 \cdot c}{c^2}} = 0{,}60 \cdot c\,.$$

Dit antwoord klopt met b.

Opgave 3

Bekijk het vanuit kogel B.

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} = \frac{0{,}6 \cdot c + 0{,}7 \cdot c}{1 + \frac{0{,}6 \cdot c \cdot 0{,}7 \cdot c}{c^2}} = 0{,}92 \cdot c$$

Opgave 4

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} \text{ wordt } 0{,}80 \cdot c = \frac{0{,}40 \cdot c + u'}{1 + \frac{0{,}40 \cdot c \cdot u'}{c^2}}$$

Vereenvoudiging van de noemer geeft:

$$0{,}80 \cdot c = \frac{0{,}40 \cdot c + u'}{1 + \frac{0{,}40 \cdot u'}{c}}$$

Dit geeft:

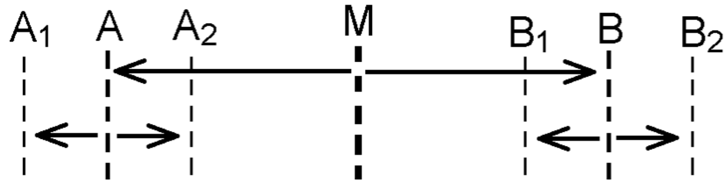
$$0{,}80 \cdot c + 0{,}80 \cdot 0{,}40 \cdot u' = 0{,}40 \cdot c + u'$$

Hieruit volgt:

$$0{,}40 \cdot c = 0{,}68 \cdot u'$$

Uiteindelijk vinden we: u'= 0,59·c.

Opgave 5



A en B komen voort uit M.
A_1 en A_2 komen voort uit A.
B_1 en B_2 komen voort uit B.

Hieronder wordt niet op het teken van de snelheden gelet.
Stap 1: bereken de snelheid van B2 ten opzichte van M.
Verbind waarnemer W aan M en waarnemer W' aan B.

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} = \frac{0{,}50 \cdot c + 0{,}50 \cdot c}{1 + \frac{0{,}50 \cdot c \cdot 0{,}50 \cdot c}{c^2}} = 0{,}80 \cdot c$$

De snelheid van A1 ten opzichte van M (en omgekeerd) is dus ook 0,80·c.

Stap 2: bereken de snelheid van B2 ten opzichte van A1.
Verbind waarnemer W aan A1 en waarnemer W' aan M.

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} = \frac{0{,}80 \cdot c + 0{,}80 \cdot c}{1 + \frac{0{,}80 \cdot c \cdot 0{,}80 \cdot c}{c^2}} = 0{,}97 \cdot c$$