

Naam: _____ Klas: _____

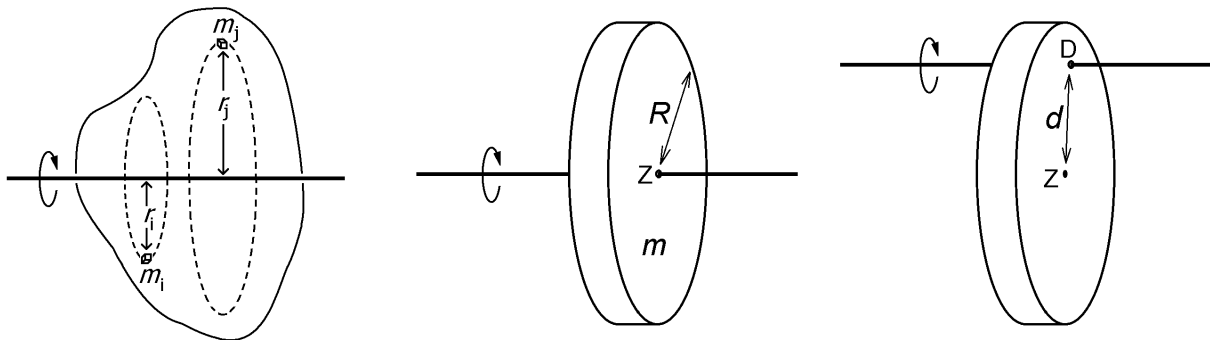
Practicum: traagheidsmoment ronde schijf

Traagheidsmoment

Voorwerpen die om een as kunnen draaien, hebben een zogenoemd 'traagheidsmoment', aangeduid met de hoofdletter I . Dit traagheidsmoment geeft aan in welke mate het voorwerp zich verzet tegen veranderingen van zijn hoeksnelheid (of draaisnelheid of toerental). Het lijkt dus veel op het begrip 'massa', aangezien de massa van een voorwerp aangeeft in welke mate het voorwerp zich verzet tegen veranderingen van zijn snelheid.

We stellen ons het voorwerp voor als een grote groep kleine massadeeltjes m_i die ieder op afstand r_i van de draaiingsas zitten. Zie de onderstaande linker figuur. Dan geldt voor het traagheidsmoment:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$



In de middelste figuur is een ronde schijf met massa m en straal R afgebeeld. De draaiingsas gaat door het zwaartepunt Z van de schijf. Voor dit speciale geval geldt voor het traagheidsmoment:

$$I_Z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$$

In de rechter figuur loopt de draaiingsas niet door het zwaartepunt van het voorwerp. Het traagheidsmoment I_D is dan altijd groter dan in het geval dat de draaiingsas wel door het zwaartepunt gaat. Volgens de 'verschuivingsstelling van Steiner' is het verband tussen I_D en I_Z gegeven door:

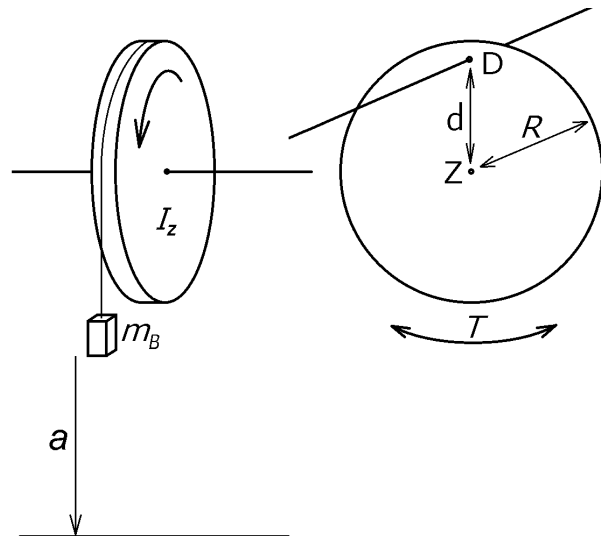
$$I_D = I_Z + m \cdot d^2.$$

Hierbij is d de afstand tussen het draaipunt D en het zwaartepunt Z . De relatie tussen I_D en I_Z geldt algemeen en dus niet alleen voor ronde schijven.

Hierboven werd al genoemd dat massa bij snelheidsveranderingen overeen komt met traagheidsmoment bij veranderingen van de hoeksnelheid. In dit verband komen ook twee vergelijkingen met elkaar overeen, namelijk $F = m \cdot a$ en $M = I \cdot \alpha$. In de eerste vergelijking, de zogenoemde tweede wet van Newton, zijn F de (resulterende) kracht op het voorwerp, m de massa van het voorwerp en a de versnelling van het voorwerp. In de tweede vergelijking zijn M het (resulterende) krachtmoment op het voorwerp, I het traagheidsmoment van het voorwerp en α de hoekversnelling van het voorwerp. Beide vergelijkingen komen verderop aan bod.

Doel van het practicum

In dit practicum wordt het traagheidsmoment I_z van een ronde schijf met straal R op twee verschillende manieren experimenteel bepaald. Zie de figuren hiernaast. Bij de eerste manier wordt de schijf in een versnelde rotatiebeweging gebracht door een blokje los te laten dat aan een touwtje hangt dat om de schijf gewonden is. Bij de tweede manier voert de schijf een slingerbeweging uit rond punt D dat dichtbij de rand van de schijf ligt.



Theorie manier 1

In het begin zijn het blokje en de schijf in rust. Zodra het blokje wordt losgelaten, voert het onder invloed van de zwaartekracht een eenparig versnelde beweging met versnelling a uit. Gelijktijdig neemt de hoeksnelheid ω van de schijf ook gelijkmatig toe. De hoekversnelling α van de schijf is gedefinieerd als:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Het verband tussen a en α is:

$$a = \alpha \cdot R.$$

Het blokje zorgt voor een spankracht F_S in het koord. Door deze F_S werkt er een krachtmoment $F_S \cdot R$ op de schijf. Dit krachtmoment veroorzaakt de hoekversnelling α van de schijf. Het verband tussen deze grootheden is:

$$F_S \cdot R = I_z \cdot \alpha.$$

Deze vergelijking kan herschreven worden tot:

$$F_S = \frac{I_z}{R^2} \cdot a.$$

De tweede wet van Newton, toegepast op het blokje met massa m_B , levert:

$$m_B \cdot g - F_S = m_B \cdot a.$$

Hierin is g de gravitatieversnelling op aarde ($9,8 \text{ m/s}^2$). Substitutie van de een na laatste vergelijking in de laatste vergelijking geeft:

$$m_B \cdot g = \left[m_B + \frac{I_z}{R^2} \right] \cdot a.$$

Met deze vergelijking kan het traagheidsmoment I_z van de schijf experimenteel bepaald worden. Daartoe moet wel de versnelling a van het naar beneden bewegende blokje bepaald worden. Deze versnelling volgt eenvoudig uit de daalafstand en de daaltijd van het blokje totdat dit blokje de grond raakt.

Theorie manier 2

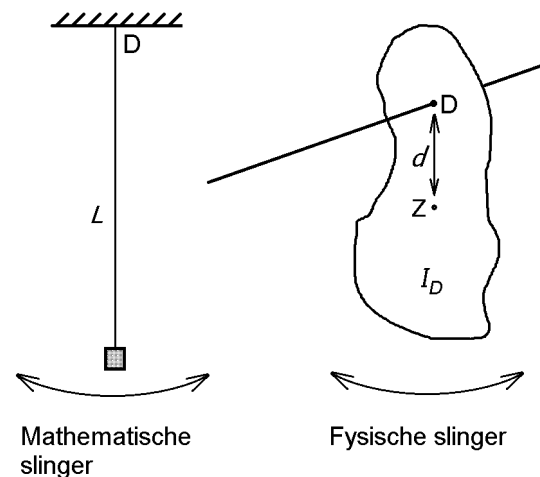
In de figuur hiernaast zijn een zogenoemde mathematische slinger en een fysische slinger afgebeeld. Bij kleine uitwijkingen geldt voor de slingertijd T van de mathematische slinger met lengte L :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Bij kleine uitwijkingen geldt voor de slingertijd T van de fysische slinger:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_D}{mgd}}$$

Hierin is I_D het traagheidsmoment van het slingerende voorwerp. Verder is m de massa van het slingerende voorwerp. De afstand tussen het draaipunt D en het zwaartepunt Z wordt aangegeven met d . Als het draaipunt D samen zou vallen met het zwaartepunt Z , zou d dus nul zijn en T oneindig groot worden. Slingeren ten gevolge van de zwaartekracht zou dan onmogelijk zijn.



In de bovenstaande formule is I_D het traagheidsmoment ten opzichte van de draaiingsas (punt D). Het traagheidsmoment ten opzichte van het zwaartepunt Z is met I_Z aangegeven. Volgens de 'verschuivingsstelling van Steiner' geldt voor de slingertijd dus ook:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_Z + m \cdot d^2}{mgd}}$$

Als we de laatste formule toepassen op de ronde schijf, kan I_Z experimenteel bepaald worden uit T , m en d .

Opdrachten

Van de TOA of leraar krijg je een ronde schijf en andere attributen.

Bepaal van de schijf de waarde van R , d en m .

Bepaal van het blokje de waarde van m_B .

Bepaal met methode 1 het traagheidsmoment I_Z van de ronde schijf.

Bepaal met methode 2 het traagheidsmoment I_Z van de ronde schijf.

Bereken het traagheidsmoment I_Z van de ronde schijf uit alleen m en R .

Vergelijk de drie uitkomsten met elkaar. Verklaar eventuele verschillen.

Geef aan hoe de proeven nauwkeuriger gemaakt kunnen worden.

Schrijf over de proef een verslag.