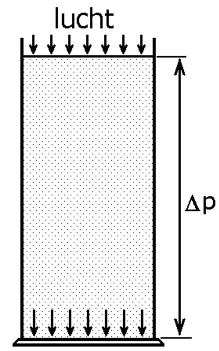
Wet van Bernoulli

§ 1 Druk in stilstaande vloeistoffen en gassen

Druk in een vloeistof



In de figuur hiernaast bevindt zich een hoeveelheid vloeistof in een grote bak. De lucht boven de vloeistof oefent een druk op de vloeistofspiegel uit. Deze druk is schematisch weergegeven als kleine pijltjes.

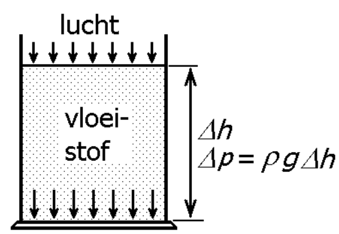
Op zijn beurt oefent de vloeistof een druk op de bodem uit. Deze druk is als langere pijltjes weergegeven want de druk onderin de vloeistof is groter dan de druk bovenin. Dit merk je bijvoorbeeld als je naar de bodem van een diep zwembad duikt. Je moet dan slikken om te voorkomen dat je pijn aan je oren krijgt.

Het verschil tussen de luchtdruk en de druk op de bodem wordt veroorzaakt door het gewicht van de vloeistof. De zwaartekracht trekt de vloeistof namelijk naar beneden. In het volgende wordt dit drukverschil met Δp aangeduid en leren we hoe we het moeten berekenen. Stel bijvoorbeeld dat Δp = 30.000 Pa (met Pa = pascal) en dat de luchtdruk 100.000 Pa is. De druk op de bodem is dan 100.000 Pa + 30.000 Pa = 130.000 Pa.

Het berekenen van de druk door het gewicht van een vloeistof

In de bovenstaande situatie spreken we van een vloeistofkolom. Bij het berekenen van het drukverschil tussen de bovenkant (bij de vloeistofspiegel) en onderkant (bij de bodem) van de vloeistofkolom spelen de volgende grootheden en eenheden een rol (zie tabel en figuur).

Grootheden	Eenheden
Δp = drukverschil	Pa = pascal (= newton per vierkante meter)
ρ = dichtheid	kg/m^3 = kilogram per kubieke meter
g = gravitatieversnelling	N/kg = newton per kilogram
Δh = hoogteverschil	m = meter



Het drukverschil kan met de volgende formule berekend worden.

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

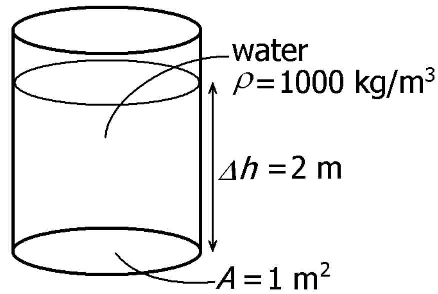
Over de grootheden in de formule kunnen we het volgende opmerken.

1)
Het drukverschil wordt met Δp aangeduid en het hoogteverschil met Δh. Het deltasymbool Δ wordt altijd gebruikt als het om het verschil tussen twee waarden gaat.

2)
De dichtheid geeft aan hoe zwaar de vloeistof is. Bijvoorbeeld is de dichtheid van water 1000 kg/m^3 en die van kwik 13500 kg/m^3.

3)
De gravitatieversnelling is de kracht (uitgedrukt in newton) waarmee de aarde aan een voorwerp van 1 kilogram trekt. Algemener gezegd: de gravitatieversnelling is de zwaartekracht per eenheid van massa. Voor de aarde geldt: g = 9,8 N/kg.

Rekenvoorbeeld



In de figuur hiernaast is een grote ronde bak gevuld met water. Het grondvlak van de bak heeft een oppervlakte van 1 m^2. De hoogte van de waterkolom is 2 m. Water heeft een dichtheid van 1000 kg/m^3.

Het drukverschil tussen de bovenkant en onderkant van de waterkolom kan nu als volgt berekend worden.

$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h = 1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} \cdot 2\ \text{m} = 19600\ \text{Pa}$

Ter controle kunnen we de berekening ook uitvoeren met de “oude” formules.
Voor het volume van het water geldt:

$V = A \cdot \Delta h = 1\text{m}^2 \cdot 2\ \text{m} = 2\ \text{m}^3$

Voor de massa van het water geldt dan:

$m = \rho \cdot V = 1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 2\ \text{m}^3 = 2000\ \text{kg}$

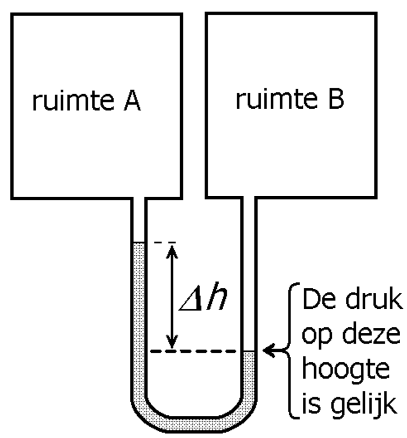
Op elke kilogram werkt (op aarde) een zwaartekracht van 9,8 N. Dus geldt:

$F_Z = m \cdot g = 2000\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 19600\ \text{N}$

Voor het drukverschil tussen boven en onder geldt dan:

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{19600\ \text{N}}{1\text{m}^2} = 19600\ \text{N/m}^2$$

Drukverschillen meten met een U-buis



In de figuur hiernaast zijn de twee ruimtes A en B gevuld met een gas. Een U-buis die gevuld is met een vloeistof verbindt de beide ruimtes met elkaar. Het doel van deze U-buis is het meten van het drukverschil tussen A en B.

In de figuur is de druk in ruimte B groter dan in ruimte A. Daarom staat de vloeistof in het rechter been van de U-buis lager. Uit het hoogteverschil Δh tussen de vloeistofniveau’s kan het drukverschil Δp tussen A en B berekend worden. De formule hiervoor is weer:

$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$

Stel bijvoorbeeld dat de U-buis gevuld is met kwik en dat het kwik rechts 5 cm lager staat dan links. Dan geldt voor dit drukverschil:

$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h = 13500\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} \cdot 0{,}05\ \text{m} = 6615\ \text{Pa}$

Druk in gassen

In het voorgaande gebruikten we de formule *Δp = ρ•g•Δh* alleen voor vloeistoffen. De formule kan echter ook toegepast worden op gassen. Alleen moeten de hoogteverschillen dan wel veel groter zijn om merkbare drukverschillen te krijgen. Immers, gassen zijn veel lichter dan vloeistoffen. Toch mogen de hoogteverschillen ook weer niet te groot zijn want dan speelt de samendrukbaarheid van gassen een rol en kun je niet meer over één dichtheid *ρ* spreken. Globaal gezegd moeten hoogteverschillen kleiner blijven dan 100 meter. De dichtheidsverschillen van het gas blijven dan kleiner dan 1%.

Voorbeeld

Je staat op de begane grond van een torenflat. Je stapt in de lift en gaat naar de bovenste verdieping. Je stijgt hierbij 80 m. De dichtheid van de lucht (op zeeniveau) is 1,3 kg/m^3. De drukafname (op je oren) is dan:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h = 1{,}3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\ \mathrm{N/kg} \cdot 80\ \mathrm{m} = 1019\ \mathrm{Pa}$$

Opgaven bij § 1

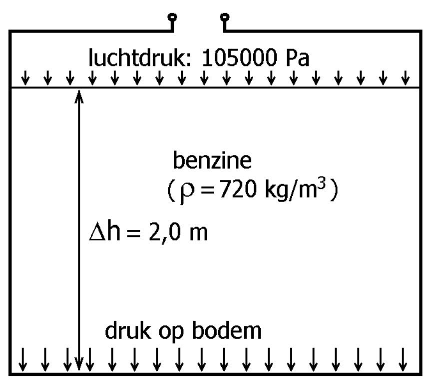
Opgave 1
Met welke formule bereken je de druk die door het gewicht van een vloeistofkolom wordt veroorzaakt?

Opgave 2
Leg uit waarom de formule $\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$ slechts beperkt geldig is voor gassen.

Hoe groot mogen hoogteverschillen in gassen maximaal zijn om de formule $\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$ te kunnen gebruiken?

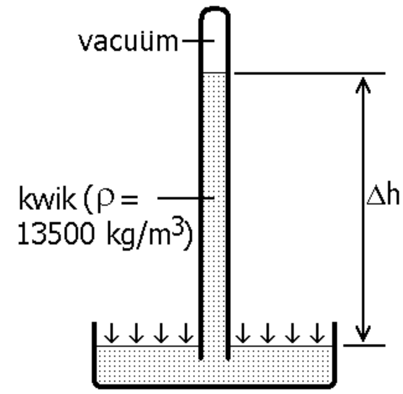
Opgave 3
Je staat op de begane grond van een torenflat. Je stapt in de lift en gaat naar de bovenste verdieping. Je stijgt hierbij 60 m. Neem aan dat de dichtheid van de lucht 1,3 kg/m^3 is.
Bereken de drukafname die bij het stijgen optreedt.

Opgave 4
In de figuur hiernaast is een opslagvat voor benzine afgebeeld. Alle gegevens staan in de figuur.
Bereken de druk op de bodem van het opslagvat.



Opgave 5

Vroeger werd de opstelling hiernaast als barometer gebruikt en staat bekend als de barometer van Torricelli. Deze bestaat uit een glazen buis, die zich in een bak met kwik bevindt. In de buis boven het kwik heerst vacuüm. De dampkring oefent een druk op het kwik uit. Zie de kleine pijltjes in de figuur. Daardoor staat het kwik in de buis hoger dan het kwik in de bak. Veranderingen in de luchtdruk leiden tot veranderingen in het hoogteverschil Δh.



a.

Stel dat de luchtdruk van de dampkring afneemt. Wordt het hoogteverschil Δh dan groter of kleiner?

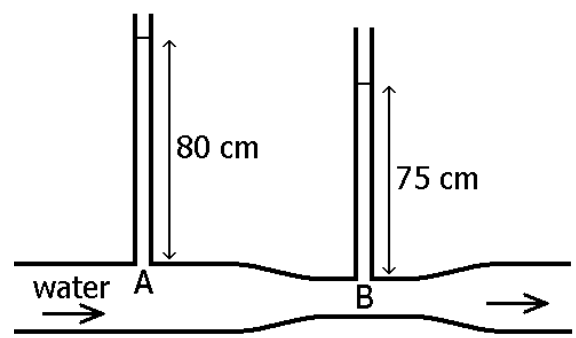
b.

De luchtdruk is gemiddeld 101300 pascal. Bereken het hoogteverschil dat daarbij hoort.

Opgave 6

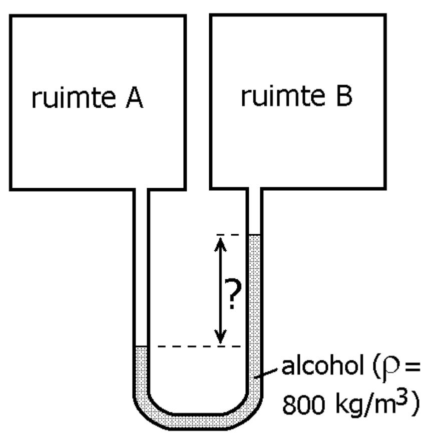
In de figuur hiernaast stroomt water door een buis. In de buis zit een vernauwing. Het drukverschil tussen de punten A en B in de buis kan met twee verticale pijlbuizen gemeten worden.

Bereken dit drukverschil.



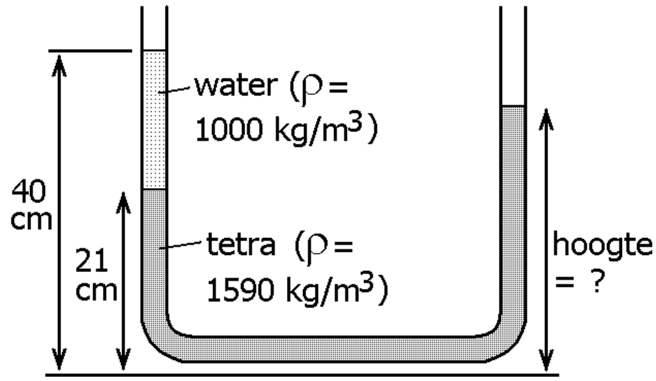
Opgave 7

Twee ruimtes A en B zijn gevuld met een gas. De ruimtes zijn via een slangetje met elkaar verbonden. In het slangetje zit alcohol. In ruimte A heerst een druk van 100.000 Pa en in ruimte B 98000 Pa. Bereken het hoogteverschil tussen beide alcoholniveaus.



Opgave 8

In de figuur hiernaast is een U-buis afgebeeld die gevuld is met de vloeistoffen tetra en water. De uiteinden van de buis zijn open. Verdere gegevens staan in de figuur. Bereken de hoogte van het tetraniveau in de rechter buis.

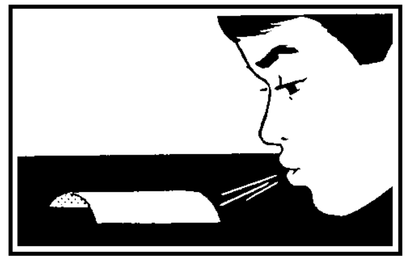


§ 2 Druk in stromende vloeistoffen en gassen

Daniel Bernoulli

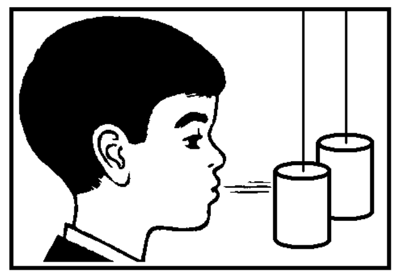
Daniel Bernoulli was een geleerde uit de achttiende eeuw die uit Antwerpen naar Zwitserland was gevlucht. Hij toonde aan dat gassen en vloeistoffen een lagere druk hebben op plaatsen waar ze snel stromen. Dit principe wordt in de volgende proefjes gedemonstreerd.

Briefkaart op tafel



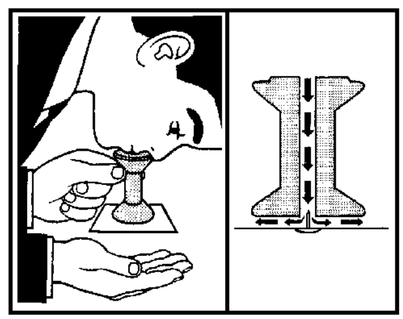
Je legt een briefkaart, die je in de lengterichting wat gebogen hebt, op een tafel. Je probeert de briefkaart om te keren door er onder te blazen. Dit blijkt erg tegen te vallen. De kaart zuigt zich namelijk vast tegen de tafel. Hoe kan dat? De luchtstroom onder de briefkaart stroomt snel. De druk onder de briefkaart is dus kleiner geworden (Bernoulli). Het drukverschil tussen de bovenkant en onderkant van de kaart “duwt” de kaart dan tegen de tafel.

Twee lege bierblikjes



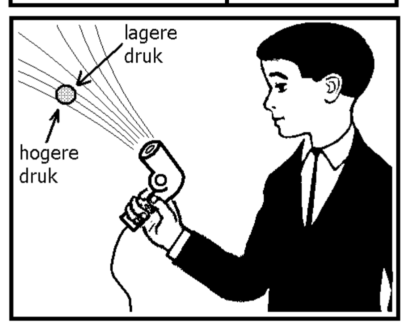
Je hangt twee lege bierblikjes ieder aan een touwtje op. De afstand tussen de blikjes is ongeveer 5 cm. Als je tussen de blikjes blaast, bewegen de blikjes naar elkaar toe. De verklaring volgt weer uit de theorie van Bernoulli. Immers, de lucht tussen de blikjes beweegt snel. De druk tussen de blikjes is daarom lager dan die van de stilstaande lucht. Dit drukverschil laat de blikjes naar het midden bewegen.

Zwevende ansichtkaart



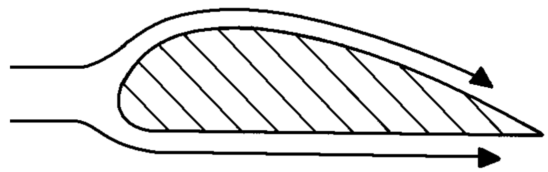
Door het midden van een halve ansichtkaart prik je een punaise. Je legt de kaart op je hand met de punt naar boven. Je zet een klosje over de punaise heen. Je blaast vervolgens van boven door het klosje. De ansichtkaart blijft onder het klosje zweven. De theorie van Bernoulli kan dit weer verklaren. De lucht tussen het klosje en de ansichtkaart stroomt snel. Daardoor is de druk kleiner geworden en duwt de lucht onder de kaart deze naar boven.

Balletje in de luchtstroom van een föhn



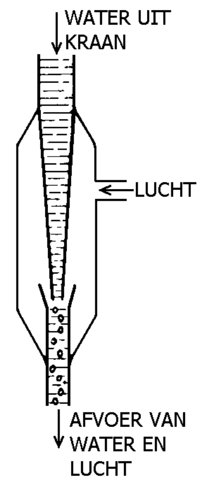
Je laat een föhn lucht naar boven blazen. Je brengt voorzichtig een licht balletje zoals een pingpongballetje in de luchtstroom. Dit balletje blijft in de luchtstroom gevangen en valt niet naar beneden. Weer is de drukverlaging door de hoge snelheid van de lucht de oorzaak.

Toepassing van Bernoulli: vliegtuigvleugel



Een vliegtuigvleugel is zo gemaakt dat de lucht aan de bovenkant sneller stroomt dan de lucht aan de onderkant van de vleugel. De lucht moet namelijk langs de bovenkant een grotere afstand afleggen. Daardoor is de luchtdruk aan de bovenkant lager dan de luchtdruk aan de onderkant van de vleugel. Hierdoor ondervindt de vleugel een kracht naar boven. Dit is één van de redenen waarom een vliegtuig in de lucht blijft.

Nog een toepassing: waterstraalpomp



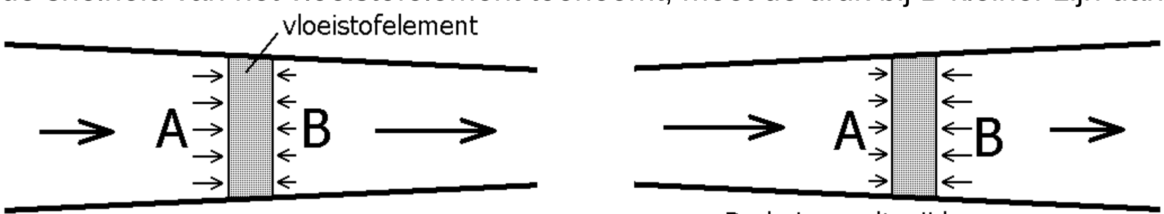
De theorie van Bernoulli gaat niet alleen op voor gassen maar ook voor vloeistoffen. Dit wordt gebruikt bij een waterstraalpomp. Een waterstraalpomp moet op de waterleiding worden aangesloten en heeft tot doel lucht uit een ruimte weg te zuigen.

Het kraanwater stroomt door een buis die steeds nauwer wordt. Zie de figuur hiernaast. Met zeer grote snelheid stroomt het water uit de opening. Onder deze opening wordt het water opgevangen en afgevoerd door een tweede buis. Behalve water wordt hierbij ook lucht opgezogen. Dat komt omdat de druk van het water sterk is gedaald vanwege de hoge snelheid.

Waarom daalt de druk bij een toename van de snelheid?

In de onderstaande linker figuur is een buis getekend die steeds nauwer wordt. Door de buis stroomt een vloeistof. Bij B stroomt de vloeistof (een beetje) sneller dan bij A omdat de diameter van de buis daar kleiner is. Om te begrijpen dat de druk bij B kleiner is dan bij A nemen we een schijfvormig vloeistofelement in gedachten.

De druk bij A veroorzaakt op het vloeistofelement een duwkracht in de bewegingsrichting. Zie de kleine pijltjes bij A. De druk bij B veroorzaakt op het vloeistofelement een duwkracht tegen de beweging in. Zie de kleine pijltjes bij B. Omdat de snelheid van het vloeistofelement toeneemt, moet de druk bij B kleiner zijn dan bij A.



De buis wordt nauwer.
Elk vloeistofelement versnelt.

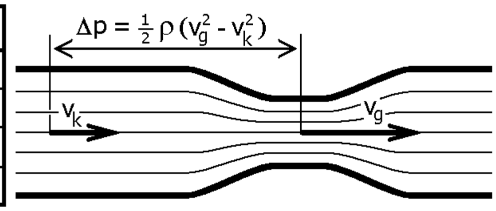
De buis wordt wijder.
Elk vloeistofelement remt af.

In de rechter figuur wordt de buis steeds wijder. Het getekende vloeistofelement remt dan af. Dat is alleen mogelijk als de druk bij B groter is dan de druk bij A.

De wet van Bernoulli zonder hoogteverschillen

In het nu volgende leren we hoe we drukverschillen kunnen berekenen in een stromende vloeistof of gas. Met name kijken we naar drukverschillen die optreden bij snelheidsveranderingen. In de onderstaande tabel staan de grootheden en eenheden die van belang zijn.

Grootheden	Eenheden
Δp = drukverschil	Pa = pascal
ρ = dichtheid	kg/m^3 = kilogram per kubieke meter
v_g = grootste stroomsnelheid	m/s = meter per seconde
v_k = kleinste stroomsnelheid	m/s = meter per seconde



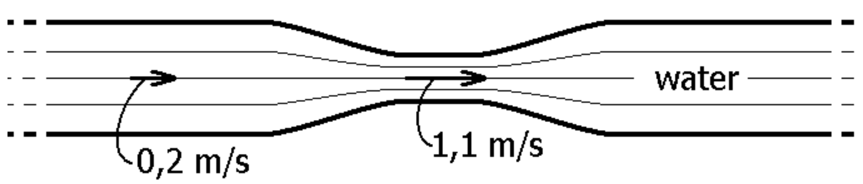
We bespreken de theorie aan de hand van de figuur naast de tabel. Door een buis met een vernauwing stroomt een vloeistof of gas. De stroombanen geven aan langs welke wegen de vloeistof of het gas stroomt. Het drukverschil tussen een punt ruim voor de vernauwing en een punt in de vernauwing kan met de volgende formule berekend worden. Hierin is v_g de grootste en v_k de kleinste van de twee snelheden in de punten.

$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_g^2 - v_k^2)$$

Deze formule heet de wet van Bernoulli. In de volgende paragraaf wordt deze wet uitgebreid voor hoogteverschillen. Bij het toepassen van de wet van Bernoulli moeten de twee punten op dezelfde stroomlijn liggen.

De wet van Bernoulli geldt zowel voor vloeistoffen als voor gassen. Gassen zijn veel lichter dan vloeistoffen. Daarom moeten de snelheden en snelheidsverschillen bij gassen veel groter zijn om even grote drukverschillen te krijgen. Maar om de wet van Bernoulli bij gassen te gebruiken mogen de snelheidsverschillen ook weer niet te groot zijn. Want dan gaat de samendrukbaarheid van gassen een rol spelen en kun je niet meer over één dichtheid ρ spreken. Globaal gesproken moeten snelheden van gassen kleiner blijven dan 50 m/s.

Getallenvoorbeeld



Door een buis met een vernauwing stroomt water. Zie de figuur hiernaast. In de brede buis is de stroomsnelheid 0,2 m/s en in de vernauwing 1,1 m/s. In de vernauwing is de druk lager dan in de brede buis. Het drukverschil wordt als volgt berekend.

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho \cdot \left(v_g^2 - v_k^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot \left(1{,}1^2 - 0{,}2^2\right) = 585\,\text{Pa}$$

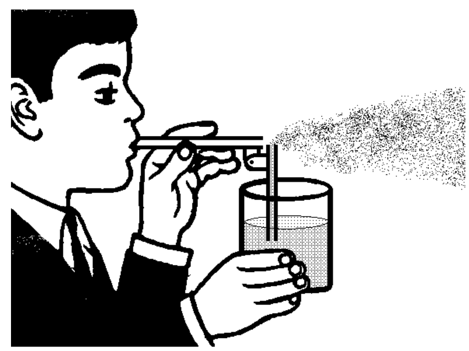
Opgaven bij § 2

Opgave 1
Stel dat een vloeistof of een gas om een voorwerp heen stroomt. Dan kun je in het algemeen zeggen dat op plaatsen waar de stroomsnelheid het grootst is, de druk het _______________ is.

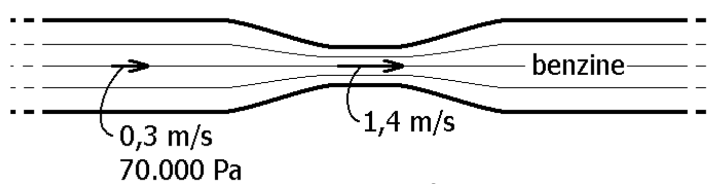
Opgave 2
Geef de formule van Bernoulli die geen rekening houdt met hoogteverschillen.

Opgave 3
Leg uit waarom een vliegtuigvleugel een opwaartse kracht ondervindt.

Opgave 4
In de figuur hiernaast blaast iemand door een fixeerspuitje. Door in het horizontale pijpje te blazen beweegt de fixeervloeistof in het verticale buisje omhoog en vermengd zich met de luchtstroom. Leg uit waarom de vloeistof hierbij omhoog gaat.



Opgave 5
Door een buis stroomt benzine. In de buis zit een vernauwing. Zie de figuur hiernaast. In de brede buis stroomt de benzine met een snelheid van 0,3 m/s en in de vernauwing met 1,4 m/s. Benzine heeft een dichtheid van 720 kg/m^3.

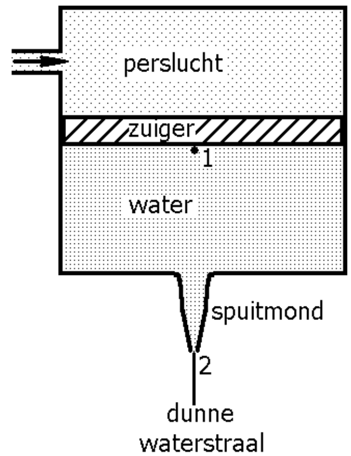


a.
Bereken het drukverschil tussen de brede buis en de vernauwing.

b.
De druk in de brede buis bedraagt 70.000 pascal. Bereken de druk in de vernauwing.

Opgave 6

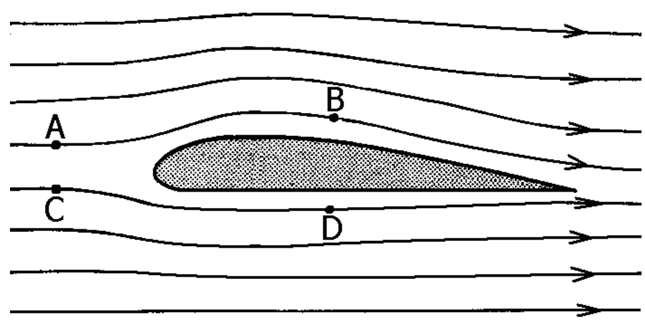
Als water (dichtheid 1000 kg/m^3) in een dunne straal een grote snelheid heeft, kan men er hard materiaal mee snijden. Voordelen van snijden met water zijn een grote nauwkeurigheid en gave snijranden. De figuur hiernaast toont hoe zo'n waterstraal gerealiseerd kan worden. In een cilinder bevindt zich water onder een zuiger. Door de druk van de perslucht op de zuiger spuit het water met een snelheid van 850 m/s uit de opening van de spuitmond. De zuiger daalt daarbij met een snelheid van 0,7 mm/s.



Bereken nu met de wet van Bernoulli het drukverschil Δp tussen de punten 1 en 2. Houd hierbij geen rekening met hoogteverschillen tussen de punten 1 en 2.

Opgave 7

In de figuur hiernaast stroomt er lucht langs een vliegtuigvleugel. Zie de stroombanen.
In de punten A en C is de snelheid van de lucht 50 m/s. In punt B is de snelheid 55 m/s en in punt D is deze 51 m/s.
Neem aan dat de dichtheid van de lucht overal gelijk is en dat hiervoor geldt: ρ = 1,3 kg/m^3.



a.
Leg uit waarom je de wet van Bernoulli wel kan toepassen op de punten A en B maar eigenlijk niet op de punten A en D.

b.
Bereken met de wet van Bernoulli het drukverschil tussen de punten A en B.

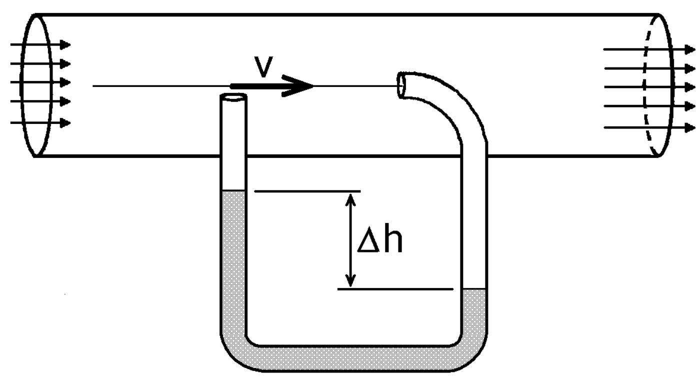
c.
Bereken met de wet van Bernoulli het drukverschil tussen de punten C en D.

d.
Bereken het drukverschil tussen de bovenkant (punt B) en onderkant (punt D) van de vliegtuigvleugel.

e.
Bereken de opwaartse kracht die de vleugel door het drukverschil ondervindt als voor de effectieve horizontale vleugeloppervlakte geldt: $A = 5\ m^2$ is. Hulp: gebruik $F = \Delta p \cdot A$.

<u>Opgave 8</u>

In de figuur hiernaast stroomt er aardgas door een pijp. Aardgas heeft een dichtheid van 0,833 kg/m^3. Om de snelheid van het aardgas te bepalen is er in de pijp een Pitotbuis opgenomen. Dit is een U-buis met twee open uiteinden waarvan één opening naar de gasstroom toe is gebogen. Uit het hoogteverschil Δh van de vloeistofniveau's in de pitotbuis volgt de snelheid van het gas.



In de figuur is één stroombaan getekend. Deze stroombaan loopt vlak langs de bovenkant van de linker opening van de Pitotbuis. De stroomsnelheid daar is v. De stroombaan eindigt in de rechter opening van de Pitotbuis. De snelheid daar is dus nul.

In de Pitotbuis bevindt zich alcohol. Deze vloeistof heeft een dichtheid van 800 kg/m^3. Door het drukverschil in beide openingen staat de alcohol aan de linker kant 1,0 cm hoger dan aan de rechter kant van de Pitotbuis. Bereken met de bovenstaande gegevens de snelheid v van het aardgas.

§ 3 Wet van Bernoulli

De wet van Bernoulli

In paragraaf 1 keken we naar drukverschillen ten gevolge van hoogteverschillen.
We berekenden een drukverschil met de formule
$\Delta p = \rho \bullet g \bullet \Delta h$.
In paragraaf 2 keken we naar drukverschillen die gepaard gingen met veranderingen in de stroomsnelheid. We berekenden een drukverschil met de formule
$\Delta p = ½ \bullet \rho \bullet (v_g^2 - v_k^2)$.

In de huidige paragraaf berekenen we drukverschillen waarin hoogteverschillen en snelheidsverschillen gelijktijdig optreden. Door de formules uit de voorgaande twee paragrafen met elkaar te combineren krijgen we de wet van Bernoulli namelijk:

$$\Delta p = \rho \bullet g \bullet \Delta h + ½ \bullet \rho \bullet (v_g^2 - v_k^2)$$

Het drukverschil dat alleen door het hoogteverschil wordt veroorzaakt wordt hierna aangegeven met Δp_h. Dit zou het drukverschil zijn als de vloeistof of het gas stil zou staan. Hiervoor geldt:

$$\Delta p_h = \rho \bullet g \bullet \Delta h$$

Het drukverschil dat alleen met snelheidsverschillen te maken heeft wordt hierna aangegeven met Δp_v. Dit zou het drukverschil zijn als hoogteverschillen geen rol van betekenis spelen. Hiervoor geldt:

$$\Delta p_v = ½ \bullet \rho \bullet (v_g^2 - v_k^2)$$

Voor het totale (uiteindelijke) drukverschil geldt dan:

$$\Delta p = \Delta p_h + \Delta p_v$$

Soms moet je Δp_h en Δp_v van elkaar aftrekken (in plaats van bij elkaar optellen) om het uiteindelijke drukverschil Δp te vinden. Dit is het geval als de stroomsnelheid het grootst is in het laagste punt, want dan hebben Δp_h en Δp_v een tegengesteld effect op het drukverschil. Zie het tweede voorbeeld hierna.

<u>Opmerking</u>
De bovenstaande formules vormen de wet van Bernoulli. De wet van Bernoulli wordt echter meestal in een andere (korte) vorm geschreven, namelijk:
$p + \rho \bullet g \bullet h + ½ \bullet \rho \bullet v^2 =$ constant langs een stroomlijn.
Wij zullen deze vorm echter niet gebruiken.

Voorwaarden om de wet van Bernoulli te kunnen gebruiken

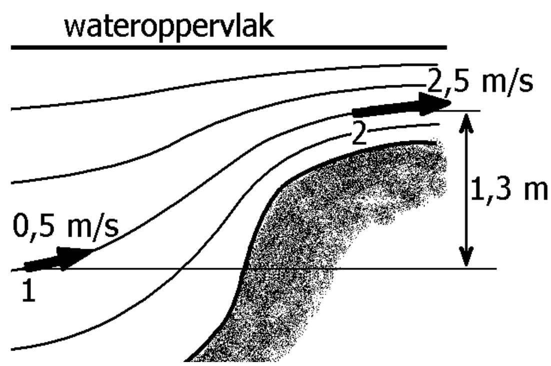
De wet van Bernoulli geldt onder een aantal voorwaarden. Deze zijn de volgende.

1. De dichtheid is constant. De stof mag dus nergens samengedrukt of uitgerekt zijn.
2. De stof mag geen inwendige wrijving hebben. De viscositeit (stroperigheid) moet nul zijn.
3. De stroming is stationair. Het gehele stromingsbeeld verandert niet met de tijd.

In de praktijk vallen deze eisen wel mee. De formule gaat meestal goed op; zowel voor vloeistoffen als voor gassen. Bij gassen, die per definitie samendrukbaar zijn, gaat de wet van Bernoulli goed op zolang de volumeveranderingen beneden 1% blijven. Dat is het geval als de stroomsnelheden minder zijn dan 50 m/s, en de hoogteverschillen minder dan 100 m bedragen.

Eerste voorbeeld

Zeewater met een dichtheid van 1024 kg/m^3 stroomt langs de bovenkant van een rots. Zie de figuur hiernaast. Op één van de stroombanen liggen de punten 1 en 2.
Het hoogteverschil tussen beide punten is 1,3 m.
De snelheid van het water in punt 1 is 0,5 m/s.
De snelheid van het water in punt 2 is 2,5 m/s.



Het hoogteverschil veroorzaakt een drukverschil (tussen de punten 1 en 2) van:

$$\Delta p_h = \rho \cdot g \cdot \Delta h = 1024\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} \cdot 1{,}3\ \text{m} = 13046\ \text{Pa}$$

Bij het snelheidsverschil hoort een drukverschil van:

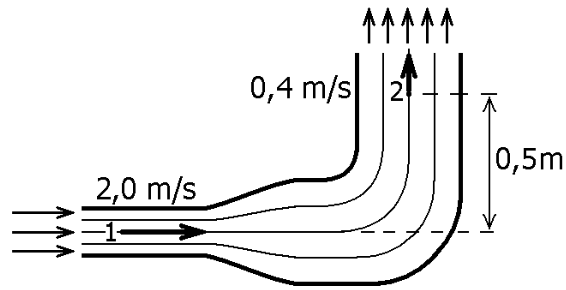
$$\Delta p_v = \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_g^2 - v_k^2) = \tfrac{1}{2} \cdot 1024 \cdot (2{,}5^2 - 0{,}5^2) = 3072\ \text{Pa}$$

De bijdragen Δp_h en Δp_v versterken elkaar want voor beiden heeft punt 2 een lagere druk dan punt 1. Voor het totale drukverschil geldt daarom:

$$\Delta p = \Delta p_h + \Delta p_v = 13046\ \text{Pa} + 3072\ \text{Pa} = 16118\ \text{Pa}$$

Tweede voorbeeld

In de figuur hiernaast stroomt water (met een dichtheid van 1000 kg/m^3) door een buis. In de buis zit een verbreding en daarna een bocht naar boven. De punten 1 en 2 liggen op dezelfde stroomlijn. Het hoogteverschil tussen beide punten is 0,5 m. De stroomsnelheid in punt 1 is 2,0 m/s en in punt 2 is deze 0,4 m/s.



Het hoogteverschil veroorzaakt een drukverschil van:

$$\Delta p_h = \rho \cdot g \cdot \Delta h = 1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\ \mathrm{N/kg} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 4900\ \mathrm{Pa}$$

Bij het snelheidsverschil hoort een drukverschil van:

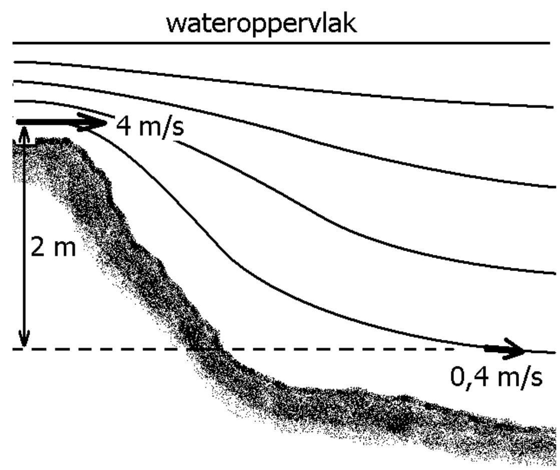
$$\Delta p_v = \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_g^2 - v_k^2) = \tfrac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (2{,}0^2 - 0{,}4^2) = 1920\ \mathrm{Pa}$$

In deze situatie hebben Δp_h en Δp_v een tegengesteld effect want punt 1 heeft voor Δp_h de grootste druk en voor Δp_v de kleinste druk (de snelheid is daar het grootst). Daarom moeten Δp_h en Δp_v van elkaar worden afgetrokken. Voor het totale drukverschil geldt daarom:

$$\Delta p = \Delta p_h - \Delta p_v = 4900\ \mathrm{Pa} - 1920\ \mathrm{Pa} = 2980\ \mathrm{Pa}$$

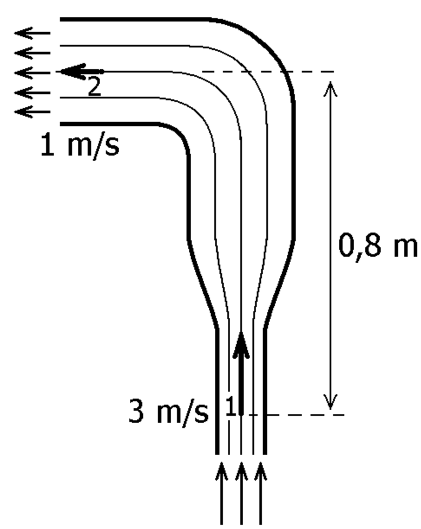
Opgaven bij § 3

<u>Opgave 1</u>
In de figuur hiernaast stroomt rivierwater (met een dichtheid van 1000 kg/m^3) langs de bovenkant van een rots. Voorbij de rots komt het water in een dieper gedeelte terecht. In de figuur zijn ook een aantal stroombanen getekend.



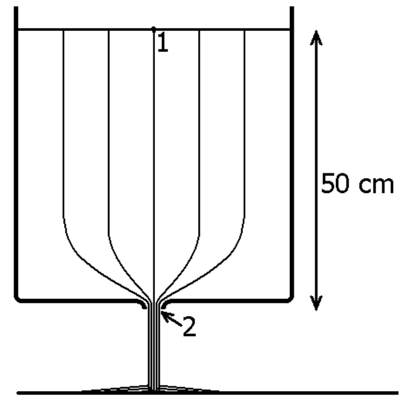
Van de onderste stroombaan zijn twee punten genomen. In de figuur zijn de stroomsnelheden in beide punten gegeven. Ook is het hoogteverschil gegeven. Bereken hoeveel de druk in het onderste punt meer is dan in het bovenste punt.

<u>Opgave 2</u>
In de figuur hiernaast stroomt water (met een dichtheid van 1000 kg/m^3) door een buis. In de buis zit een verbreding en daarna een bocht naar links. De punten 1 en 2 liggen op dezelfde stroomlijn. Het hoogteverschil tussen beide punten is 0,8 m. De stroomsnelheid in punt 1 is 3,0 m/s en in punt 2 is deze 1 m/s.
Bereken het drukverschil tussen punt 1 en punt 2.
Geef ook aan in welk van deze twee punten de druk het grootst is.



Opgave 3

Deze opgave gaat over de uitstroming van water (met een dichtheid van 1000 kg/m^3) uit een vat. Zie de figuur hiernaast. Ook zijn de stroombanen getekend. Op één van de stroombanen liggen de punten 1 en 2.



De druk in punt 1 en punt 2 zijn gelijk aan elkaar. Dit is immers de luchtdruk van de dampkring. Dat betekent dat het drukverschil door hoogte helemaal opgeheven wordt door het drukverschil behorend bij snelheidsveranderingen. Met andere woorden:

$$\Delta p_h = \Delta p_v$$

Bereken nu de snelheid waarmee het water uit het vat stroomt. Dit is de snelheid bij punt 2. Neem hierbij aan dat de snelheid in punt 1 zo klein is dat je deze kunt verwaarlozen (neem dus 0 m/s).

Opgave 4

In de figuur hiernaast is een bak met vloeistof getekend. De vloeistof stroomt via een afvoerpijp weg. In de figuur zijn vijf stroomlijnen getekend. De punten 1 en 2 liggen op de middelste stroomlijn. De druk in beide punten is gelijk aan elkaar. Dit is weer de druk van de dampkring.

Leg uit dat hoe langer de afvoerpijp is, des te sneller het water uit de bak stroomt. Ga er weer vanuit dat de snelheid in punt 1 verwaarloosbaar klein is.