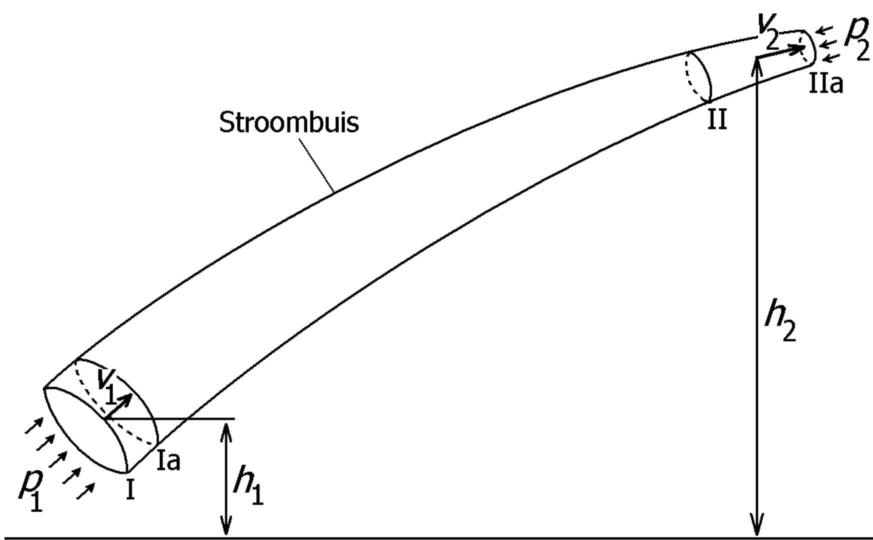
Bewijs van de wet van Bernoulli

In het volgende richten we ons op stromende vloeistoffen of gassen die overal dezelfde dichtheid hebben (symbool ρ) en waarvan de viscositeit (= stroperigheid ten gevolge van interne wrijving) verwaarloosbaar is. Bovendien stellen we als eis dat de stroming stationair is. Dat wil zeggen dat deze niet verandert met de tijd. In zulke situaties geldt de wet van Bernoulli. Deze wet wordt hieronder afgeleid.



In de figuur hiernaast kijken we naar de beweging van een bepaalde hoeveelheid vloeistof of gas. Deze stromende stof wordt omsloten door een denkbeeldige stroombuis die voortdurend de stromingsrichting volgt. De stromende stof zit eerst tussen de doorsneden I en II en een kleine tijdsduur later tussen de doorsneden Ia en IIa. Het volume tussen de doorsneden I en Ia is gelijk aan het volume tussen de doorsneden II en IIa. Dit volume wordt in het vervolg met ΔV aangeduid.

Tijdens het opschuiven van onze hoeveelheid stof in de stroombuis verricht de omringende stof arbeid. Dat komt omdat de druk aan de achterzijde (p_1) groter is dan die aan de voorzijde (p_2). Voor deze arbeid geldt:

$$W = p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V$$

Tijdens het opschuiven van onze stof neemt de zwaarte-energie toe. Dat komt omdat de hoogte aan de voorzijde (h_2) groter is dan die aan de achterzijde (h_1). Voor deze toename geldt:

$$\Delta E_Z = \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h_1$$

Tijdens het opschuiven van onze stof neemt de kinetische energie toe. Dat komt omdat de snelheid aan de voorzijde (v_2) groter is dan die aan de achterzijde (v_1). Voor deze toename geldt:

$$\Delta E_K = \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot v_2^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot v_1^2$$

De geleverde arbeid is gelijk aan de toename van de zwaarte-energie plus de toename van de kinetische energie. In formulevorm is dit:

$$W = \Delta E_Z + \Delta E_K$$

Als we de eerste drie formules substitueren in de laatste formule en alle termen delen door *ΔV*, krijgen we:

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot g \cdot h_1 + \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2$$

Na rangschikking van de termen ontstaat er:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

Dit kan nog herschreven worden tot:

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{const.}$$